

Seppo Mustonen

Viritysjärjestelmistä

1. Johdanto

Kiinteäasteisten soittimien, kuten pianon, cembalon ja urkujen virittäminen on ongelma, joka on saanut lopullisen sovitteluratkaisunsa nykyisin käytössä olevassa tasavireisessä järjestelmässä. Tunnetuista syistä tämäntapaisia instrumentteja on mahdotonta virittää siten, että kaikki käyttämämme sävelasteikon intervallit eri sävellajeissa olisivat puhtaita.

Itse olen erityisesti kiinnostunut cembalosta ja monessa suhteessa virittämiseen liittyvät kysymykset ovat juuri tämän soittimen kannalta mielenkiintoisia. Pianoon verrattuna heiveröisestä rakenteestaan johtuen cembalo ei pidä viritystään kovin hyvin. Viritys saattaa liukua paikaltaan jo muutamassa tunnissa ja tätä muuntumista voimistavat olennaisesti lämpötilan ja kosteuden vaihtelut sekä myös instrumentin soittaminen. Kuitenkaan esim. konserttitilaisuuksissa nämä muutokset eivät yleensä ole niin suuria, että ne yksinomaan riittäisivät selittämään epäpuhtauden, joka tarkasti kuunneltaessa on cembalon soinnissa selvästi havaittavissa. Epäpuhtauksien kuulemista voimistaa cembalon äänen ominaisluonne, sen pianoon verrattuna runsas osäänespitoisuus, joka saa intervallien epäpuhtauden aiheuttamat huojunnat selvästi erottumaan soinnista. Huojunnat saattavat häiritä kuulijaa, vaikka virityksessä ei olisikaan mitään olennaista vikaa. Esim. tasavireisen järjestelmän terssien ja sekstien epäpuhtaus tuntuu cembalon soinnissa kiusalliselta etenkin, jos asiaan kiinnittää tietoisesti huomiota. Onneksi ihmiskorvan mukautuminen likimääräisten intervallien kuunteluun helpottaa tilannetta. Tätä sopeutuvuutta todistaa sekin, että cembalistit, jotka olosuhteiden pakosta joutuvat usein harjoittelemaan epävireisillä soittimilla, ovat alistuneet kohtaloonsa ja katsovat »epäpuhtauden kuuluvan soittimen perusominaisuuksiin».

Edellä selostamani kuvaa virittämisen pulmia pelkästään välittömän kuulohavainnon pohjalta. Aivan toisenlaisen näkökulman antavat virittämiseen liittyvät perinteet, jotka cembalolla yltävät pari sataa vuotta edelle aikaa, jona tasavireinen järjestelmä (1600- ja 1700-lukujen vaihteen tienoilla) vakiintui vallitsevaksi. Voidaan kysyä, missä määrin tasavireinen järjestelmä soveltuu vanhan cembalomusiikin (kuten myös urkumusiikin) esittämiseen. Tämän kysymyksen kannalta on

aiheellista tutkia järjestelmiä, joita käytettiin ennen tasavireisen järjestelmän tuloa ja vertailla näitä keskenään. En pyri virityksen historian kertaamisessa mihinkään tyhjentävään selvitykseen, vaan keskityn tasavireisen järjestelmän rinnalla kuvaamaan keskisävelviritystä (mean tone tempering, mitteltönige Stimmung), joka ilmeisesti on ollut tasavireistä edeltävä vakiintunut menettely ja luonteeltaan melko erilainen.

Kun pyritään yleiseen esitystapaan ja käytetään hyväksi tässä yhteydessä ehkä aluksi oudoksuttavalta tuntuvaa tilastomatemaaattista malli-ajattelua, käy ilmi, että molemmat edellä mainitut järjestelmät ovat tulokittavissa tietyn yleisen virityskaavion erikoistapauksiksi. Tämän kaavion avulla on mahdollista kehitellä muitakin viritysjärjestelmiä, jotka ovat tunnettujen järjestelmien välimuotoja tai jopa näistä poikkeavia.

Yleinen virityskaavio perustuu olennaisesti tilastollisen virheteorian tavanomaisimman menettelyn, pienimmän neliösumman keinon käyttöön. Tämän menettelyn esitti tiettävästi ensimmäisenä eräs kaikkien aikojen huomattavin matemaatikko Karl Friedrich Gauss vuonna 1821 soveltaessaan sitä tähtitieteellisten havaintovirheiden tasoiittamiseen. Sitten pienimmän neliösumman keino on ollut alati käytössä mitä moninaisimmissa tilanteissa, joissa havaintoarvojen väliset ristiriitaisuudet tulisi mahdollisimman taitavasti sovittaa yhteen.

Tässä tutkimuksessa yleisen virityskaavion perusteiden esittely ja itse kaavion kehittäminen on ollut etusijalla. Eräänlaisena kaavion sovellutuksena pyrin valottamaan virityksen perinteitä ja antamaan käytännön tietoutta »hyvän virityksen» saavuttamiseksi vanhaa cembalomusiikkia esitettäessä.

Ryhtyessäni tarkastelemaan aiheitani yksityiskohtaisesti pyrin tiivistämään musiikillisten perustietojen esittelyä melko paljon, sillä nämä asiathan lienevät useille tuttuja. Kohdissa, joissa esitykseni tuntuu ehkä liian ylimalkaiselta, lukija löytäneekin lisätietoja alan yleiskirjallisuudesta. Erityisen suositeltavaa on tutustua Jouko Tolosen väitöskirjaan (1969), jossa tarvittava musiikillinen taustatietous on mukavasti saatavilla ja varsinkin viritystä koskevissa kysymyksissä Llewelyn S. Lloydin mielenkiintoiseen artikkelikokoelmaan »Intervals, Scales and Temperaments» (1963). Tarvittavaa matemaattista perustietoa on tässä yhteydessä mahdotonta kerrata. Matematiikkaa vieroksuva lukija säilyttäneen otteensa selostuksen yleislinjasta, vaikka sivuuttaisikin hankalimmat kohdat.

2. Virityksen musiikkiteoreettinen tausta

2.1. Osääneket. Yleensä jokainen säveltä synnyttävä äänilähde, kuten esim. vapaasti värähtelevä jännitetty kieli, synnyttää paitsi matalimpana kuuluvan pohjaäänoksen, ensimmäisen osääneksen, myös muita osääneksiä, »yläsäveleitä», joiden värähdysluvut eli frekvenssit ovat pohjaäänoksen värähdysluvun monikertoja. Pohjaäänoksen ja muiden osäänenesten voimakkuussuhteista riippuu olennaisesti sävelen ominaisuus. Jännitetyn kielen värähdellessä osäänenesten esiintyminen selittyy sillä, että kieli pääsee värähtelemään paitsi koko pituudeltaan, mistä muodostuu pohjaäänos, myös puolikkailtaan, kolmasosiltaan, neljäsosiltaan jne., jolloin näitä murto-osa-aallonpituuksia vastaten syntyvät

eri osääneket. Yleensä matalat osääneket ovat voimakkaampia kuin korkeat. Mitä löysemmällä kielä on, sitä helpommin värähtelyt saattavat levittäytyä korkeampien osääneketen suuntaan. Tämä selittää suureksi osaksi, miksi ohuilla, löysillä kielillä varustetun cembalon sointi on osäänespitoisempaa kuin pianon. Soittimen äänen luonne ei kuitenkaan määräydy pelkästään tämän perusteella, vaan siihen vaikuttaa osaltaan myös äänen synty tapa ja soittimen muut akustiset ominaisuudet, jotka tuottavat kullekin instrumentille tyypillisiä hälyääniä ja joista riippuu, miten osäänesjakauma vaihtelee soinnin kestäessä.

2.2. Intervallit. Kahden eri kielien värähdellessä samanaikaisesti kuul-tujen sävelten välinen intervalli koetaan sitä miellyttävämmäksi mitä paremmin niiden tärkeimmät osääneket sulautuvat yhteen. Edellä kuvatun valossa tämä merkitsee, että hyviksi, konsonoiviksi intervalleiksi kelpuutetaan yleensä ne, joissa sävelten frekvenssien suhde on ilmaistavissa pienten kokonaislukujen suhteena. Tämän havainnon teki jo aikoinaan Pythagoras (570–504 e.Kr.), joskin hän tarkkaili aallonpituuksien (kielenpituuksien) suhteita frekvenssien asemasta, siis frekvenssien käänteisarvoja. Tärkeitä intervalleja ovat siten seuraavat:

<i>intervalli</i>	<i>suhdeluku</i>
priimi	$\frac{1}{1}$
oktaavi	$\frac{2}{1}$
kvintti	$\frac{3}{2}$
kvartti	$\frac{4}{3}$
suurterssi	$\frac{5}{4}$
pienterssi	$\frac{6}{5}$
vahva suursekunti	$\frac{9}{8}$
heikko suursekunti	$\frac{10}{9}$

Suur- ja pienterssin käänteisintervallit pienseksti ($\frac{8}{5}$) ja suurseksti ($\frac{5}{3}$) voitaisiin vielä lisätä tähän luetteloon. Muita intervalleja ei tulla tässä yhteydessä tarvitsemaan.

Intervallin yksinkertaisuus ja konsonoivuus kuvastuu selvästi juuri siinä, miten hyvin eri osääneket lankeavat yhteen. Priimissä yhtyvät luonnollisesti kaikki osääneket, oktaavissa alemman sävelen joka toinen osäänes ylempään jokaiseen, kvintissä alemman sävelen joka kolmas ylempään joka toiseen, kvartissa alemman sävelen joka neljäs ylempään joka kolmanteen jne.

Yleisesti: Jos intervallin muodostavat sävelet, joiden osääneketen frekvenssit ovat ensimmäisestä osäänekestä ylöspäin luetellen $u_1, u_2, u_3, \dots (u_i = iu_1)$ alemmalla ja $v_1, v_2, v_3, \dots (v_j = jv_1)$ ylempällä sävellä sekä intervallin suhdeluku on m/n , missä m ja n ovat keskenään jaottomia kokonaislukuja, niin osääneket yhtyvät siten, että $u_{mk} = v_{nk}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ Siis ensimmäisinä sulautuvat yhteen u_m ja v_n .

2.3. Huojunta. Edellä on tarkasteltu puhtaita intervalleja. Mikäli intervalli ei ole puhdas, osääneket eivät enää osu tarkkaan yhteen kuvatulla tavalla. Lievä intervallin epäpuhtaus kuullaan tällöin jaksolli-

sena huojuntana, jonka värähdysluku on ensimmäisten puhtaassa intervallissa yhteensopivien osäänesten nyt toisistaan poikkeavien vastineiden frekvenssien erotus. Tämä ilmiö voidaan helposti selittää äänen aaltoliikkeen perusteella.¹

Esim. epäpuhdas priimi, jossa sävelten (1. osäänesten) värähdysluvut ovat 440 ja 442 Hz, aiheuttaa ensimmäisten osäänestensä yhteensopimattomuuden vuoksi huojunnan, jonka taajuus on 2 Hz. Vastaavasti epäpuhtaassa kvartissa, jonka muodostavat sävelet ovat värähdysluvuiltaan 440 ja 587 Hz, kuullaan huojunta, jonka frekvenssi on ylemmän sävelen 3. ja alemman sävelen 4. osäänesteen frekvenssien erotus eli $3 \cdot 587 \text{ Hz} - 4 \cdot 440 \text{ Hz} = 1 \text{ Hz}$. Intervalli koetaan luonnollisesti sitä epäpuhtaammaksi, mitä taajempaa huojunta on ja huojunta on häiritsevintä niissä intervaleissa, joissa jo aivan alimpien osäänesten tulisi kohdata toisensa. Siten järjestys, jossa intervallit edellä taulukoitiin, vastaa järjestystä, jossa epäpuhtauden haitat vähenevät ja näin myös järjestystä, jossa intervallien puhtaudet on järkevä ottaa huomioon soitinta viritettäessä.

2.4. Pythagoraan komma ja syntoninen komma. Säveljärjestelmämme perustuu ratkaisevasti siihen, että oktaavi jaetaan 12 peräkkäiseen osaintervalliin², joista tulisi rakentaa tärkeimmät intervallit puhtaina. Tämä on mahdollista, mikäli näitä osaintervalleja ei tarvitse pitää täysin kiinteinä, vaan ainakin muutamia säveliä voidaan muuntaa hieman tilanteesta riippuen. Tähän pystyvät laulajat ja sellaiset instrumentalistit, esim. jousisoittajat, jotka voivat jatkuvasti säädellä säveltasoa. Kiinteäasteisissa soittimissa sen sijaan viritys vakioi jokaisen sävelen tason, jolloin soiton aikana ei ole mahdollista lainkaan mukautua kaikkiin intervalli- ja sointupuhtauden vaatimuksiin. Jo aivan tärkeimpien intervallien kesken ilmenee ristiriitaisuuksia, joille tavalla tai toisella tulee löytää sovittelemuratkaisu virityksessä. Pahimpia intervallien keskeisiä yhteensopimattomuuksia 12-asteisessa kiinteässä oktaavijaossa edustavat Pythagoraan komma P , joka kuvaa oktaavin ja kvintin välistä ristiriitaa, ja syntoninen komma S , joka ilmaisee suurterssin ja kvintin välisen yhteensopimattomuuden.

Näiden epäkohtien valaisemiseksi kerrattakoon aluksi, miten 12-portaisessa oktaavijaossamme tärkeimmät intervallit saavat vastineensa. Tarkastellaan oktaavia c_1 -sävelestä³ ylöspäin. Oheisesta taulukosta näkyy, minkälaisia intervaleja muiden sävelien tulisi muodostaa $c_1:n$ kanssa.

¹ Taylor s. 116

² On periaatteessa muitakin mahdollisuuksia. Esim. myös 19, 31, 50 ja 53 ovat hyviä osaintervallien lukumääriä. Lloyd (1963) s. 197–205.

³ Merkitsemme eri oktaavialojen säveliä symbolein $c_i, c_{is}, \dots, h_i$, missä $i = 1$ tarkoittaa 1-viivaista, $i = 2$ 2-viivaista, $i = 0$ pientä, $i = -1$ suurta oktaavialaa jne. Kun oktaavialasta ei ole väliä, jätän alaindeksit tavallisesti pois. Enharmonisista sävelistä käytän yleensä vain yhtä, taulukosta ilmenevää merkintää. Tästä »kiinteäasteisesta» ajatustavasta johtuu, että sanon esim. intervallia (es, gis) kvartiksi.

sävel	aste	intervalli	suhdeluku
c_1	0	priimi	$1/1$
c_{is_1}	1	piensekunti	
d_1	2	suursekunti	
e_{s_1}	3	pienterssi	$6/5$
e_1	4	suurterssi	$5/4$
f_1	5	kvartti	$4/3$
f_{is_1}	6	tritonus	
g_1	7	kvintti	$3/2$
g_{is_1}	8	pienseksti	$8/5$
a_1	9	suurseksti	$5/3$
b_1	10	pienseptimi	
h_1	11	suurseptimi	
c_2	12	oktaavi	$2/1$

Vastaavien intervallien tulisi syntyä lähdettäessä myös mistä muusta sävelestä tahansa.

Kvintin (c_1, g_1) edustaessa 7. astetta ja oktaavin (c_1, c_2) 12. astetta tässä portaikossa 7 oktaavin olisi vastattava täsmälleen 12 kvinttiä. Tuo ei kuitenkaan päde, jos intervallipuhtaudesta halutaan pitää kiinni, sillä valittaessa c_1 :n värähdysluku yksiköksi päästään nousemalla 7 oktaavia ylöspäin säveleen c_8 , jonka frekvenssi on 2^7 , ja etenemällä vastaavasti c_1 :stä 12 kvinttiä ylöspäin tullaan samaan säveleen, jonka frekvenssi olisikin nyt $(3/2)^{12}$. Havaitaan, että $(3/2)^{12} > 2^7$ ja näiden värähdyslukujen suhdetta $P = (3/2)^{12}/2^7 \approx 1.0136$ sanotaan Pythagoraan kommaksi. Koska 12 kvinttiä siis jonkin verran ylittää 7 oktaavia ja oktaavien puhtautta kannattaa eniten kunnioittaa, kiinteässä virityksessä on ainakin joitakin kvinttejä kavennettava ja jätettävä näin epäpuhtaiksi, jotta komma poistuisi.

Mielestäni kaikkein pahimman haitan, syntonisen komman kanssa joudutaan tekemisiin, kun yritetään sovittaa yhteen kvintit ja suurterssit. Edettäessä sävelestä c_1 4 kvinttiä ylöspäin c_1, g_1, d_2, a_2, e_3 tullaan siis säveleen e_3 , jonka värähdysluku on $(3/2)^4$. Toisaalta e_3 :n pitäisi olla 2 oktaavin + suurterssin verran c_1 :tä ylempänä ja siten sen frekvenssiksi saataisiin $2^2(5/4)$. Ensiksi saatu arvo on kuitenkin suurempi ja suhdetta $S = (3/2)^4/2^2(5/4) = 81/80 = 1.0125$ sanotaan syntoniseksi kommaksi.

Näemme, että kiinteässä virityksessä jo kaikkein tärkeimmät intervallit tuottavat keskinäisillä yhteensopimattomuuksillaan melko pahoja vaikeuksia. Mikäli nämä vaikeudet jotenkin kyettäisiin voittamaan, saataisiin aikaan viritys, jossa oktaavin, kvintin, kvartin, suurterssin ja piensekstin väliset ongelmat olisi selvitetty. Valitettavasti tämä ei taiseesti kaikkien sävellajien suhteen kunnolla onnistu. Sen vuoksi on aiheutonta jatkaa intervallien keskinäisten ristiriitaisuuksien kartoittamista. Ratkaisut, jotka tehdään tärkeimpien intervallien kannalta, saanevat siten sokeasti muiden intervallien kohtalon.

3. Perinteiset viritysjärjestelmät

3.1. Keskisävelviritys. Järjestelmän on tietävästi ensimmäisenä kuvannut italialainen Pietro Aron v. 1523.⁴ Pääperiaatteena on voittaa samanaikaisesti sekä syntonisen että Pythagoraan komman tuottamat vaikeudet. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista tasaisesti kaikkien teoriassa samanlaajuisten intervallien osalta, vaan suurterssipuhtaus saavutetaan vain kahdeksan suurterssin kohdalla neljän muun jäädessä pahasti epäpuhtaiksi. Toisaalta yksitoista 12 erilaisesta kvintistä saadaan likimain puhtaiksi yhden, tavallisesti (gis, es), tullessa »ulvovan» epäpuhtaaksi (Wolf-intervalli). Puhtauden osittainen epätasaisuus rajoittaa keskisävelvirityksen käytön mielekkääksi vain suppeaan osaan sävellajeja.

Keskisäveljärjestelmän periaatteesta saa mielestäni helpoimmin käsityksen tarkastelemalla 12-sävelistä asteikkoa kvinttiympyrän puitteissa. Otetaan lähtökohdaksi c_1 , jonka värähdysluku valittakoon jälleen yksiköksi. Edetään tästä kvinteittäin ylös- ja alaspäin pitäen samanaikaisesti kiinni kahdesta vaatimuksesta: 1) jokaisen kvintin suhdeluku on vakio $= q$, 2) suurterssit ovat puhtaita eli niiden suhdeluku on $5/4$. Tällöin syntyy seuraavanlainen säveljono:

sävel	frekvenssi
es_{-1}	q^{-3}
b_{-1}	q^{-2}
f_0	q^{-1}
c_1	1
g_1	q
d_2	q^2
a_2	q^3
e_3	q^4
h_3	q^5
fis_4	q^6
cis_5	q^7
gis_5	q^8
dis_6	q^9

Koska intervalli (c_1 , e_3) on 2 oktaavia + suurterssi, e_3 :n värähdysluvun q^4 tulee nyt vaatimuksen 2 mukaisesti täyttää ehto $q^4 = 4 \cdot (5/4)$ eli $q = 5^{1/4} = 1.49535$, mikä on pienempi kuin $3/2 = 1.5$, joten kvintit jäävät puhtaita kvinttejä kapeammiksi. Sen sijaan suurterssi (c , e) on puhdas ja havaitsemme juuri muodostetun taulukon perusteella, että samoin on tilanne suurterssien (g , h), (d , fis), (a , cis), (e , gis), (h , dis) ja toisella suunnalla (f , a), (b , d), (es , g) kohdalla. Kuitenkin pitäydyttäessä kiinteäasteisessa virityksessä dis on sama kuin es , jolloin dis_6 :n frekvenssin q^9 asemasta valitaankin 2^7 kertaa es_{-1} :n värähdysluku eli $2^7 q^{-3} = 128 \cdot 5^{-3/4}$, mikä on suurempi kuin $q^9 = 125 \cdot 5^{-3/4}$. Suurterssi (h , dis) = (h , es), ei siis olekaan enää puhdas, vaan sen suhdeluku on $32/25 = 1.28$ ja näin suurempi kuin $5/4 = 1.25$. Yhtäläillä liian leveiksi tulevat myös

⁴ Barbour s. 72

suurterssit (fis, b), (cis, f) ja (gis, c). Sävelen dis mukauttaminen es-säveleksi tuottaa kuitenkin kaikkein vakavimman häiriön kvintille (gis, dis), joka nyt korvattuna intervallilla (gis, es) saa suhdeluvun $128 \cdot 5^{-11/4} = 1.5312$, mikä roimasti ylittää oikean arvon 1.5. Tämä merkitsee esim. intervallin (gis₁, es₂) kohdalla huojautelua, joka on noin 415 ($2 \cdot 1.5312 - 3$) Hz = 26 Hz ja korvalle varsin tuskallista. Onkin ymmärrettävää, että aikoinaan joissakin uruissa, klavikordeissa ja cembaloissa es- ja gis-koskettimet jaettiin kahteen osaan siten, että es-koskettimen toinen puoli antoi keskisävelvirityksen mukaisen dis:in ja gis-koskettimen toinen puoli as:in, jolloin »wolfit» vältettiin.⁵ Nimensä keskisävelviritys on saanut varsinaisesti siitä, että tässä järjestelmässä diatonisen asteikon kokosävelaskeleet, joiden suhdeluvut ovat muotoa $9/8$ (vahva suursekunti) tai $10/9$ (heikko suursekunti), tulevat kaikki korvatuiksi näiden suhdelukujen geometrista keskiarvoa $\sqrt{(9/8) \cdot (10/9)} = \sqrt{5/2}$ vastaavilla intervalleilla. Tämä on helposti todennettavissa edellä esitetyn taulukon avulla palauttamalla ensin kaikki sävelet samaan oktaavialaan.

Nyt kuvaillussa muodossa keskisävelvirityksen käyttökelpoisuus rajoittuu C-, G-, D-, A-, F- ja B-duuriin sekä g-, d- ja a-molliin. Luonnollisesti käytännössä (cembalolla ja klavikordilla) keskussäveleksi saatettiin c:n asemasta valita jokin toinen, jolloin sopivien sävellajien alue siirtyi.⁶ Lisäksi on ilmeistä, ja se vaikuttaa tämän järjestelmän ominaisuuksien selvittämistä, että virittäminen ei tapahtunut välttämättä tunnollisesti edellä esitetyn periaatteen mukaisesti, vaan oli luonnollista poiketa hieman suurterssien ehdottomasta puhtaudesta muiden intervallien hyväksi. Näin jokainen virittäjä saattoi toimia kokemuseräisesti jonkin verran oman makunsa mukaan.⁶

Keskisävelviritys oli eniten käytetty viritysjärjestelmä ennen 1700-luvun alkua. Tosin esim. Englannissa vielä 1800-luvun puolivälissä urut viritettiin yleisesti vanhaan tapaan.⁷ Tämän järjestelmän erikoispiirteillä on varmaankin ollut oma vaikutuksensa siihen, millaista musiikkia kosketinsoittimille aikoinaan sävellettiin. Pystymättä perusteellisemmin analysoimaan tuota vaikutusta on tietenkin todettava paitsi keskisävelvirityksen aiheuttamat rajoitukset, jotka esim. estivät kaikki rohkeammat modulaatiot, toisaalta useiden säveltäjien hämmästyttävän taidokas mukautuminen järjestelmän ominaisuuksiin. Mielestäni esim. Frescobaldin (1583–1643) omaleimainen kromatiikka ja sävellystapa yleensä pääsee erittäin hyvin oikeuksiinsa käytettäessä keskisävelviritystä. Monet soinnut, jotka keskisävelviritteisinä kuulostavat puhtailta ja selkeiltä, samenevat mielenkiinnottomiksi tasavireistä järjestelmää käytettäessä. Nykyinen kuuliija saattaa kokea keskisävelviritteisen soiton paikoitellen omituiseksi, koska intonaatio poikkeaa totutusta. Oman havaintoni mukaan melko pian tuo outouden tunne kaikkoo ja varsinkin kauniita terssejä ja sekstejä sekä tästä johtuvaa soinnin kirkkautta oppii arvostamaan; kaikki tuo tietenkin edellytyksellä, että musiikki on järjestelmään sopeutettua.

⁵ Lloyd (1963) s. 103, Russell s. 46 ja kuva 82

⁶ Näistä seikoista tarkemmin kohdassa 6.2.

⁷ Dart s. 46

3. 2. Tasavireinen järjestelmä. Tämän ratkaisun keksijänä on pidetty melko yleisesti saksalaista Andreas Werckmeisteria (1645–1706), vaikka monet tosiseikat viittaavat siihen, että jo huomattavasti aikaisemmin on ollut käytössä menettelyjä, jotka ovat ainakin likimain vastanneet nykyistä tasavireistä järjestelmää. G. M. Lanfranco on v. 1533 kuvannut erään tällaisen ratkaisun ja Galilein tiedetään v. 1581 suosittaneen puolissävelaskeleen suhdeluvuksi arvoa $18/17$, mikä on hyvin lähellä tasavireistä arvoa.⁸ On myös luonnotonta ajatella, että vaikkapa kokoelmassa *The Fitzwilliam Virginal Book* olevaa John Bullin (1562–1628) sävellystä no LI *Ut, re, mi, fa, sol, la* esitettäisiin muulla kuin tasavireisellä soittimella.⁹

Onpa toisaalta asetettu kyseenalaiseksi, tarkoittiko Werckmeister käsitteellä »wohl temperiert» tasavireistä järjestelmää. Hänelle ja monelle hänen aikalaisistaan se lienee merkinnyt viritystä, joka »on käyttökelpoinen kaikissa sävellajeissa, mutta parempi useimmin esiintyvissä sävellajeissa».¹⁰ J. Murray Barbour on jopa selvästi osoittanut, että vaikka Werckmeister tunsi tasavireisen järjestelmän, hän ei täysin hyväksynyt sitä, vaan oli taipuvainen kannattamaan tiettyjä epäsäännöllisiä viritystapoja, jotka suosivat tavanomaisia sävellajeja.¹¹ Myytti Werckmeisterista tasavireisen järjestelmän luoja juontaa alkunsa J. Matthesonin kirjoituksesta v. 1725.⁸

Tasavireinen järjestelmä on periaatteessa keskisäveljärjestelmää huomattavasti yksinkertaisempi. Siinä pyritään ennen kaikkea sävellajien täydelliseen tasa-arvoisuuteen jakamalla Pythagoraan komma tasan kaikkien kvinttien kesken, siis supistamalla jokaista kvinttiä hiukan, jotta 12 kvinttiä vastaisi täsmälleen 7 oktaavia. Tämä periaate määrää virituksen yksikäsitteisesti ja jättää syntoniseen kommaan liittyvän ongelman ratkaisematta seurauksella, että terssit vääristyvät valitettavan paljon.

Tarkastelemalla jälleen edellä kuvattua kvinttiympyrää todetaan, että nyt tulisi olla $q^{12} = 2^7$ eli kvintin suhdeluvuksi saadaan $2^{7/12} = 1.49831$ ja siis selvästi parempi kuin keskisävelvirityksessä. Palauttamalla taulukon sävelet samaan oktaavialaan havaitaan, että kaikki puolissävelaskeleet ovat samansuuruisia ja suhdeluvuiltaan $2^{1/12}$. Oktaavi jakautuu näin 12 yhtä suureen osaintervalliin. Tasavireinen järjestelmä hoitaa siten kvinttiin ja sen käänteisintervalliin, kvarttiin liittyvät ongelmat mukavasti, mutta heikosti käy suurterssien, joiden suhdeluvut $2^{4/12} = 1.25992$ ovat melko kaukana oikeista. Sama koskee tietenkin suurterssien käänteisintervalleja, piensekstejä. Myös tasavireisen järjestelmän pienterssit ja suursekstit ovat keskisävelviritteisiä huonompia. Esim. oktaavialalla (a_0, a_1) kvinttien huojunta on suuruusluokkaa 0.8 hz – 1.4 hz ja siis miltei merkityksetöntä, kun sen sijaan suurterssien huojunta vaihtelee välillä 9 hz – 16 hz ja on jo varsin häiritsevää.

Tasavireistä instrumenttia kuunneltaessa on täten pakko mukautua terssien ja sekstien melkoiseen epäpuhtauteen, mutta ovathan vastalah-

⁸ Dahlhaus

⁹ Maitland and Squire s. XIX

¹⁰ Lloyd (1954) s. 379

¹¹ Barbour s. 68–71, 89

jaksi kaikki sävellajit tasaveroisina käytettävissä. Tässä suhteessa tasavireinen on kiistatta paras mahdollinen viritysjärjestelmä.

4. Yleinen virityskaavio

Kumpikin edellä esitellyistä viritysjärjestelmistä edustaa määrättyä intervallia suosivaa äärimmäisratkaisua ja ne ovat keskenään ristiriitaiset. Eri intervallien merkitystä painotetaan niissä eri tavalla. Ajatus intervallien painottamisesta on ollut yleisen virityskaavion lähtökohdana. Jokaisen mahdollisen viritysjärjestelmän perustana voidaan käsitykseni mukaan pitää sitä, kuinka eri intervallien puhtautta halutaan korostaa toisiin intervaleihin verrattuna.

Jotta tällainen lähtökohta olisi mielekäs, on päästävä järkevään sopimukseen siitä, miten intervallin puhtautta tai epäpuhtautta mitataan, mitä tarkoitetaan puhtauden painottamisella ja mikä on yleismitta koko viritysjärjestelmän hyvyydelle. Nyt esiteltävä virityskaavio ratkaisee mainitut kysymykset tietyllä, mielestäni luonnollisella tavalla, vaikka en halua väittää, että ratkaisu on ainoa mahdollinen edes periaatteessa. Kaavion luonnollisuutta ja yleispätevyyttä tukee mm. se, että kumpikin aiemmin kuvatuista viritysjärjestelmistä on kaavion erikoistapaus. Siten on mahdollista päästä käsiksi esim. erilaisiin näiden äärimmäisratkaisujen väliin jääviin järjestelmiin.

Olkoon kahden sävelen (1. osaaäneksen) frekvenssit x ja y sekä $x < y$. Jos intervalli ¹² (x, y) tulkitaan siten, että sen tulee vastata esim. suurterssiä, jolloin oikea suhdeluku on $5/4$, intervalli (x, y) tuottaa huojunnan (suurterssihuojunnan), jonka suuruus on $4y - 5x$. Tätä voidaan pitää absoluuttisena epäpuhtauden mittana. Se ei kuitenkaan kelpaa lopulliseksi epäpuhtausmitaksi, koska näin saatu epäpuhtausarvo riippuu olennaisesti siitä, millä korkeudella tietyn tyyppistä intervallia tarkastellaan. Jos siirrytään vaikkapa oktaavin verran ylöspäin intervalliin $(2x, 2y)$, tämän suurterssihuojunta on $2(4y - 5x)$ ja siis kaksinkertainen. Jotta epäpuhtaudet olisivat vertailukelpoisia eri säveltasoilla, on luonnollista suhteuttaa huojunta esim. alemman sävelen frekvenssiin x ja valita intervallin (x, y) epäpuhtausmitaksi suurterssin tapauksessa $(4y - 5x)/x$, joka on invariantti kaikissa säveltason muutoksissa. Saatua mittaa nimitettäkään suhteelliseksi suurterssihuojunnaksi.

Yleisesti: Jos (x, y) on tarkoitettu vastaamaan intervallia, jonka suhdeluku on m/n , missä m ja n ovat keskenään jaottomia kokonaislukuja, intervallin (x, y) epäpuhtausmitaksi määritellään $(my - nx)/x$. Täten esim. kvinttihuojunnan suhteellinen mitta on $(2y - 3x)/x$ ja kvarttihuojunnan $(3y - 4x)/x$. Mitan positiiviset arvot merkitsevät sitä, että intervalli on puhtaaseen verrattuna leveä, ja negatiiviset sitä, että intervalli on kapea.

Koska a on tavallisesti virityksen lähtökohtana, tarkastelen seuraavassa 12-portaista ¹³ sävelasteikkoa a_0 :sta ylöspäin merkiten eri säveliä vastaavia värähdyslukuja seuraavasti:

¹² Sovellan entistä intervallimerkintääni, vaikka sävelnimien asemasta nyt käytetäänkin frekvenssejä.

¹³ Kaikki tarkastelut voidaan ulottaa mielivaltaiseen n -portaiseen asteikkoon.

sävel	frekuenssi
a_0	x_0
b_0	x_1
h_0	x_2
c_1	x_3
cis_1	x_4
d_1	x_5
es_1	x_6
e_1	x_7
f_1	x_8
fis_1	x_9
g_1	x_{10}
gis_1	x_{11}
a_1	x_{12}
b_1	x_{13}
h_1	x_{14}
c_2	x_{15}
.	.
.	.
.	.

Koska oktaavipuhtaudesta ei ole tarkoitus missään tapauksessa luopua, on selvää, että

$$x_{i+12} = 2x_i, i = 0, 1, 2, \dots$$

Sävelen a_0 värähdysluku x_0 , viritystaso, katsotaan annetuksi ja valitaan yksinkertaisesti $x_0 = 1$, eli värähdysluvun yksikkö on siten 220 hz, mikäli käytetään normaalia viritystasoa.

Jokaisessa oktaavipuhtaassa viritysjärjestelmässä jää tällöin 11 värähdyslukua $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ valittaviksi järjestelmän ominaisuuksien edellyttämällä tavalla. Virityskaaviossa oletetaan, että intervalleille (x_i, x_j) , $j > i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ asetetaan kullekin oma tavoitesuhdelukunsa m_{ij}/n_{ij} , missä m_{ij} ja n_{ij} ovat keskenään jaottomia kokonaislukuja, jolloin intervallin (x_i, x_j) epäpuhtausarvo on $(n_{ij}x_j - m_{ij}x_i)/x_i$.

Jos näitä epäpuhtausarvoja pidetään tilastollisissa tarkasteluissa esiintyviin havaintovirheisiin verrattavina, Gaussin virheteorian nojalla on johdonmukaista valita koko viritysjärjestelmän hyvyyden mitaksi epäpuhtausarvojen neliösumma. Kun kuitenkin muistetaan, että virityksessä eri intervallien puhtausvaatimukset on syytä asettaa voimaltaan erilaisiksi ja jotkin intervallit saatetaan jättää kokonaan huomiotta (so. tavoitesuhdelukua ei aseteta), on luonnollista tällöin päätyä painotettuun pienimmän neliösumman menetelmään eli valita värähdysluvut $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ siten, että

$$M(x_1, x_2, \dots, x_{11}) = \sum_{i=0}^{11} \sum_{j=i+1}^{i+11} w_{ij} \left(\frac{n_{ij}x_j - m_{ij}x_i}{x_i} \right)^2$$

tulee mahdollisimman pieneksi. Tässä luvut w_{ij} ovat painoja, joiden

suuruudet määräävät, millä voimalla intervallien (x_i, x_j) puhtautta halutaan korostaa. Mitä suuremman painoluvun w_{ij} intervalli (x_i, x_j) saa, sitä puhtaammaksi tämä intervalli tulee. Huomattakoon erityisesti, etteivät tulosta määrää painolukujen absoluuttiset arvot vaan ainoastaan niiden keskinäiset suhteet.

Käytännössä viritysjärjestelmän hyvyysmittaa M voidaan melkoisesti yksinkertaistaa. Tietyn intervallin ollessa painotettuna sen käänteisintervallista ei tarvitse huolehtia oktaavipuhtauden ansiosta. Näin riittää, että esim. kvintteihin kohdistuvat vaatimukset sisällytetään kvarttien painotukseen ja vastaavasti piensekstien painotus hoidetaan suurterssien avulla. Kun vielä otetaan huomioon, että pahin ristiriita valitsee suurterssien ja kvinttien tai vastaavasti suurterssien ja kvarttien välillä, tyydyn tässä yhteydessä rajoitettuun mittaan, jossa painoja saavat vain suurterssit (x_i, x_{i+4}) ja kvartit (x_i, x_{i+5}) , $i = 0, 1, \dots, 11$.

Yleinen mitta M korvataan silloin mitalla

$$(1) \quad M'(x_1, x_2, \dots, x_{11}) = \sum_{i=0}^{11} t_i \left(\frac{4x_{i+4} - 5x_i}{x_i} \right)^2 + k_i \left(\frac{3x_{i+5} - 4x_i}{x_i} \right)^2$$

missä vain terssipainot $t_i = w_{i,i+4}$ ja kvarttipainot $k_i = w_{i,i+5}$ voivat olla positiivisia. Kun nämä painoluvut on valittu, tätä valintaa vastaava viritysjärjestelmä saadaan minimoimalla mitta M' muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ suhteen. Tämän minimointitehtävän yleistä ratkaisua ei ole mahdollista ilmaista täsmällisesti, vaan on tyydyttävä myöhemmässä kohdassa 6.1 esittävään likimääräisratkaisuun, joka on riittävän tarkka sovellutuksiin. Muutamissa erikoistapauksissa kuitenkin tarkka ratkaisu saadaan selville. Tämä koskee erityisesti tasavireistä ja keskisäveljärjestelmää.

5. Yleisen virityskaavion erikoistapauksia

5.1. Tasavireinen järjestelmä. On ilmeistä, että tässä tapauksessa on syytä kiinnittää huomiota kvartteihin ja painottaa niitä tasaisesti. Sitä vastoin suurterssit voidaan unohtaa ja jättää painoitta. Tasavireinen järjestelmä saadaan minimoimalla mitta (1) eli M' , kun $t_i = 0$ ja $k_i = 1$, $i = 0, 1, \dots, 11$. Vaikka tulos vaikuttaakin selvältä, on mielenkiintoista pyrkiä todistamaan se, koska on välittömästi vaikeata nähdä yhteyttä tämän minimointitehtävän ja Pythagoraan komman tasoittamisen välillä. On siis todistettava seuraava väittämä:

Muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ funktio

$$(2) \quad M_T(x_1, x_2, \dots, x_{11}) = \sum_{i=0}^{11} \left(\frac{3x_{i+5} - 4x_i}{x_i} \right)^2$$

ehdoilla $x_0 = 1$, $x_{i+12} = 2x_i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ja $x_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, 11$ saavuttaa pienimmän arvonsa, kun $x_i = 2^{i/12}$, $i = 1, 2, \dots, 11$ ja tämä minimikohta on yksikäsitteinen.

Väitteen todistamiseksi funktio (2) kirjoitetaan muotoon

$$M_T(x_1, x_2, \dots, x_{11}) = 16 \sum_{i=0}^{11} \left(3/4 \cdot \frac{x_{i+5}}{x_i} - 1 \right)^2.$$

Siirrytään uusiin muuttujiin y_i määrittelemällä

$$(3) \quad y_i = 3/4 \cdot \frac{x_{i+5}}{x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, 11,$$

jolloin y_i kuvaa suhteellisesti, kuinka paljon järjestelmän mukaisen kvartin suhdeluku poikkeaa puhtaan kvartin suhdeluvusta. Tällöin on

$$M_T(x_1, x_2, \dots, x_{11}) = f(y_0, y_1, \dots, y_{11}) = 16 \sum_{i=0}^{11} (y_i - 1)^2,$$

mutta muuttujat $y_0, y_1, \dots, y_{11}$ eivät ole toisistaan riippumattomia, vaan niitä sitoo ehto

$$\begin{aligned} y_0 y_1 \dots y_{11} &= (3/4)^{12} \cdot \frac{x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} x_{15} x_{16}}{x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11}} \\ &= (3/4)^{12} \cdot 2^5 = P \end{aligned}$$

eli muuttujien $y_0, y_1, \dots, y_{11}$ tulo on Pythagoraan komma. Tehtäväksi jää minimoida

$$(4) \quad f(y_0, y_1, \dots, y_{11}) = 16 \sum_{i=0}^{11} (y_i - 1)^2$$

ehdoilla $y_0 y_1 \dots y_{11} = P$ ja $y_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, 11$, joten Pythagoraan komma odotetusti on minimointitehtävän ainoa olennainen parametri. Tehtävän käsittely sujuu helposti Lagrangen keinolla, ja yksikäsitteiseksi minimiarvon antavaksi pisteeksi saadaan

$$y_i = P^{1/12}, \quad i = 0, 1, \dots, 11.$$

Sivuutan todistuksen yksityiskohdat. Käyttämällä lopuksi yhtälöitä (3) muodossa $x_{i+5} = (4/3)x_i y_i$ järjestyksessä $i = 0, 5, 10, 3, 8, 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7$ todetaan, että $x_i = 2^{i/12}, i = 1, 2, \dots, 11$ on funktion (2) yksikäsitteinen minimikohta.

5.2. Keskisäveljärjestelmä. Tässä tapauksessa on vaikea nähdä suoraan, miten painotus tulee valita, sillä järjestelmä ei ole täysin tasainen kaikkien periaatteissa samanlaajuisten intervallien suhteen. On sen vuoksi luonnollista säädellä vaihteittain painotusta kaavion (1) pohjalta keskisäveljärjestelmän vaatimusten mukaisesti.

Ensiksi todettakoon, että 8 suurterssin puhtaus merkitsee näitä vastaavien painojen asettamista »äärettömiksi» (käytännössä selvästi muita painoja suuremmiksi), mutta tämä vaatimus on järkevintä ottaa teoreettisessa tarkastelussa huomioon kahdeksana muuttujia $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ rajoittavana side-ehdona

$$(5) \quad x_{i+4} = {}^5/4 x_i, \quad i = 0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 10,$$

jotka vähentävät vapaiden muuttujien lukumäärän yhdestätoista kolmeen. Oktaavipuhtaus omalta osaltaan sitoo loput neljä suurterssiä rajoitusten (5) jälkeen, jolloin kaaviossa ei näiden ehtojen vallitessa tarvitse enää lainkaan ottaa suurterssejä huomioon.

Jää jäljelle ongelma, miten kvarttipainot k_i on valittava, jotta mitta

$$(6) \quad M_K(x_1, x_2, \dots, x_{11}) = \sum_{i=0}^{11} k_i \left(\frac{3x_{i+5} - 4x_i}{x_i} \right)^2$$

ehdoilla (5) saavuttaisi miniminsä keskiäselvirityksen x_i -arvoilla, jotka kohdassa 3.1 laaditun taulukon avulla johdettuna ovat

sävel	i	x_i		kts. 6.2 ¹⁴
a_0	0	1	= 1.00000	1
b_0	1	$2^3 \cdot q^{-5}$	= 1.06998	$(1/r) (4/r)^{1/4}$
h_0	2	$2^{-1} \cdot q^2$	= 1.11803	$(r/2) (4/r)^{1/2}$
c_1	3	$2^2 \cdot q^{-3}$	= 1.19628	$(1/2) (4/r)^{3/4}$
cis_1	4	$2^{-2} \cdot q^4$	= 1.25000	r
d_1	5	$2 \cdot q^{-1}$	= 1.33748	$(4/r)^{1/4}$
es_1	6	$2^4 \cdot q^{-6}$	= 1.43108	$(1/r) (4/r)^{1/2}$
e_1	7	q	= 1.49535	$(r/2) (4/r)^{3/4}$
f_1	8	$2^3 \cdot q^{-4}$	= 1.60000	$2/r$
fis_1	9	$2^{-1} \cdot q^3$	= 1.67185	$r(4/r)^{1/4}$
g_1	10	$2^2 \cdot q^{-2}$	= 1.78885	$(4/r)^{1/2}$
gis_1	11	$2^{-2} \cdot q^5$	= 1.86919	$(r^2/2) (4/r)^{3/4}$

Käyttämällä side-ehdoja (5) mitta (6) supistuu muotoon

$$(7) \quad M_K(x_1, x_2, \dots, x_{11}) = f(y_0, y_1, y_2) \\ = 16 \left[(k_0 + k_4 + k_8) (y_0 - 1)^2 \right. \\ + (k_1 + k_5 + k_9) (y_1 - 1)^2 \\ + (k_2 + k_{10}) (y_2 - 1)^2 + k_6 \left(\frac{125}{128} y_2 - 1 \right)^2 \\ \left. + (k_3 + k_7 + k_{11}) \left(\frac{S}{y_0 y_1 y_2} - 1 \right)^2 \right],$$

¹⁴ Nämä arvot liittyvät myöhemmin kohdassa 6.2 käsiteltävään yleistettyyn keski-sävelviritykseen.

missä

$$(8) \quad \gamma_i = 3/4 \cdot \frac{x_{i+5}}{x_i}, \quad i = 0, 1, 2$$

ja $S = 81/80$ on syntoninen komma. Muuttujat γ_i ovat jälleen järjestelmän mukaisen kvartin ja puhtaan kvartin suhteita. Jos määritellään lisäksi $\gamma_3 = S/(\gamma_0\gamma_1\gamma_2)$, havaitaan, että minimoitava funktio on neliötermien painokertoimia ja termiä

$$(9) \quad k_8 \left(\frac{125}{128} \gamma_2 - 1 \right)^2$$

lukuunottamatta samaa muotoa kuin edellä kohdassa 5.1 esiintynyt funktio (4). Muuttujia on nyt vain neljä ja Pythagoraan komman asemasta niitä rajoittaa syntoninen komma $S = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

Termi (9) vastaa kuitenkin käytetyssä mitassa kvartin (x_6, x_{11}) eli intervallin (es, gis) epäpuhtauskomponenttia ja tämä kvarttihan on keskisäveljärjestelmän Wolf-intervalli, jonka kustannuksella puhtaat suurterssit syntyvät. On siten luonnollista ja ilmeisesti jopa pakko valita $k_8 = 0$. Kun toisaalta muistetaan keskisävelvirityksen muiden kvarttien samanarvoisuus, on myös luonnollista asettaa muiden neliötermien kertoimet yhtäsuuriksi eli vaatia, että

$$(10) \quad k_0 + k_4 + k_8 = k_1 + k_5 + k_9 = k_2 + k_{10} = k_3 + k_7 + k_{11} = 1,$$

jolloin funktio (7) saa muodon

$$f(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 16 \sum_{i=0}^3 (\gamma_i - 1)^2,$$

missä rajoituksena on $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = S$. Tehtävä on näin muuntunut samantyyppiseksi kuin edellä tasavireistä järjestelmää tarkasteltaessa, ja yhtäläillä voidaan osoittaa, että funktio saavuttaa miniminsä, kun

$$\gamma_i = S^{1/4}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

ja tämä minimikohta on yksikäsitteinen. Käyttäen yhtälöitä (8) ja (5) vakuutaudutaan lopulta siitä, että vastaavat x_i -arvot ovat keskisävelvirityksen, siis em. taulukon mukaiset. Kuten vaatimuksista (10) nähdään, keskisävelviritykseen päädytään usealla eri painokertoimien k_i valinnalla. Ainoa olennainen ehto rajoituksen $k_8 = 0$ muistaen on

$$(11) \quad k_i + k_{i+4} + k_{i+8} = c, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

missä c on mielivaltainen positiivinen vakio.

6. Virityskaavion käyttö

6.1. Numeerinen ratkaisu. Kuten edellä huomautin, epäpuhtausmitan (1) minimoinnissa yleisessä tapauksessa, siis mielivaltaisilla painoilla t_i , k_i , on tarkan ratkaisun asemasta tyydyttävä likimääräiseen numeeriseen ratkaisuun. Syynä tähän on se, että normaaliyhtälöt, jotka saadaan asettamalla minimoitavan funktion muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ suhteen otetut derivaatat nolliksi, ovat epälineaariset. Käytännössä täysin riittävään tarkkuuteen päästään silti seuraavalla yksinkertaisella menetelmällä.

Havaitaan, että minimoitavassa neliösummassa muotoa $4x_{i+4} - 5x_i$ ja $3x_{i+5} - 4x_i$ olevat osoittajat ovat suhteellisesti herkkiä muuttujien x_i arvojen vaihtelulle verrattuna nimittäjien, siis itse muuttujien x_i arvojen vaihteluun. Tämän vuoksi nimittäjät x_i voidaan korvata sopivilla likiarvoilla $x_i^{(0)}$ ja käyttää mitan (1) asemasta numeerisissa laskelmissa mittaa

$$M_0(x_1, x_2, \dots, x_{11}) = \sum_{i=0}^{11} t_i \left(\frac{4x_{i+4} - 5x_i}{x_i^{(0)}} \right)^2 + k_i \left(\frac{3x_{i+5} - 4x_i}{x_i^{(0)}} \right)^2,$$

jolloin minimoitavana on muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ ei-negatiivisesti definiitti neliömuoto, joka sovellutuksissa on yleensä jopa positiivisesti definiitti ja jolla tällöin on yksikäsitteinen minimikohta. Minimointi tapahtuu nyt ratkaisemalla lineaariset normaaliyhtälöt.

Laatimassani tietokoneohjelmassa, joka toteuttaa tarvittavat laskutoimitukset, käytetään nimittäjinä tasavireisen järjestelmän mukaisia arvoja $x_i^{(0)} = 2^{i/12}$, $i = 0, 1, \dots, 11$. Ohjelmalle annetaan lähtötietoina viritystaso (a_0 :n värähdysluku, tavallisesti 220 hz) sekä terssi- ja kvarttipainot t_i , k_i $i = 0, 1, \dots, 11$. Tulokset saadaan taulukkona, jonka rakenne ilmenee oheisista koesovellutuksista.

Ensimmäisenä tarkasteltakoon tasavireistä järjestelmää, jonka tapauksessa, siis painoilla $t_i = 0$, $k_i = 1$, $i = 0, 1, \dots, 11$, tulokset ovat seuraavat:

	i	x_i	frek- venssi (hz)	t_i	suur- terssi- huojunta (hz)	k_i	kvartti- huojunta (hz)	kvintti- huojunta (hz)
a_0	0	1.00000	220.00	0	8.71	1	0.99	-0.75
b_0	1	1.05944	233.08	0	9.27	1	1.05	-0.79
h_0	2	1.12245	246.94	0	9.79	1	1.12	-0.84
c_1	3	1.18919	261.62	0	10.40	1	1.18	-0.88
cis_1	4	1.25990	277.18	0	11.00	1	1.26	-0.94
d_1	5	1.33483	293.66	0	11.64	1	1.32	-0.99
es_1	6	1.41418	311.12	0	12.36	1	1.41	-1.05
e_1	7	1.49830	329.63	0	13.06	1	1.50	-1.12
f_1	8	1.58737	349.22	0	13.89	1	1.58	-1.18
fis_1	9	1.68176	369.99	0	14.67	1	1.68	-1.26
g_1	10	1.78177	391.99	0	15.56	1	1.77	-1.32
gis_1	11	1.88771	415.30	0	16.49	1	1.88	-1.41

Taulukosta nähdään esim., että c_1 :n värähdysluku on 261.62 Hz, terssin (c_1, e_1) huojunta 10.40 Hz, kvartin (c_1, f_1) 1.18 Hz ja kvintin (c_1, g_1) -0.88 Hz, jolloin negatiivinen huojunta-arvo tarkoittaa intervallin kapenemista puhtaaseen verrattuna. x_i -arvojen tarkkuus on lähes 5 desimaalia suurimman virheen 0.00004 ollessa x_{11} :n kohdalla. Tämä ei johdu laskutarkkuudesta vaan käytetyn likimääräismenetellän luonteesta.

Toinen luonnollinen kokeilukohde on keskiävelviritys, johon päästään ohjelmalla valitsemalla puhtaiden suurterssien painoiksi vaikkapa ykköset ja kvarteille näihin verrattuna »häviävän» pienet painot vaatimusten $k_6 = 0$ ja (11) mukaisesti, siis esim. $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 0.0001$, $k_4 = k_5 = \dots = k_{11} = 0$. Nyt saadaan tuloksiksi

	i	x_i	frek- venssi (Hz)	t_i	suur- terssi- huojunta (Hz)	k_i	kvartti- huojunta (Hz)	kvintti- huojunta (Hz)
a_0	0	1.00000	220.00	1	0.00	0.0001	2.74	-2.04
b_0	1	1.06999	235.40	1	0.00	0.0001	2.88	-2.19
h_0	2	1.11799	245.96	0	29.51	0.0001	3.11	-2.25
c_1	3	1.19627	263.18	1	0.00	0.0001	3.27	-2.49
cis_1	4	1.25000	275.00	0	33.00	0	3.43	-2.56
d_1	5	1.33749	294.25	1	0.00	0	3.61	-2.74
es_1	6	1.43102	314.82	1	0.00	0	-25.63	-2.88
e_1	7	1.49535	328.98	1	0.00	0	4.09	-3.11
f_1	8	1.60000	352.00	1	0.00	0	4.39	-3.27
fis_1	9	1.67186	367.81	0	44.14	0	4.51	-3.43
g_1	10	1.78878	393.53	1	0.00	0	4.97	-3.61
gis_1	11	1.86919	411.22	0	49.35	0	5.11	25.63

Tulosten tarkkuus on, kun verrataan niitä kohdassa 5.2 taulukoituihin keskiävelvirituksen x_i -arvoihin, edelleen samaa luokkaa huolimatta »alkuarvojen» $x_i^{(0)} = 2^{i/12}$ »virheellisyydestä» ja side-ehtojen (5) korvaamisesta »suurilla» painoilla. Esim. Wolf-intervallin (gis_1, es_2) huojunnan tulisi olla 25.66 Hz tuloksena saadun 25.63 Hz sijasta, mutta tuolla erolla ei ole mitään käytännön merkitystä.

6.2. Yleistetty keskiävelviritys. Sen asemasta, että ottaisiin esille virityskaavion muita erikoistapauksia, esim. subjektiivisin painoin syntyviä ratkaisuja, yleistän lopuksi kohdassa 5.2 esitettyä tarkastelua siten, että nähdään selvä yhteys tasavireisen ja keskiäveljärjestelmän välillä. Pyrkimyksenä on päästä käsiksi eräisiin näiden järjestelmien väliin jääviin ratkaisuihin, jotka ovat keskiävelvirituksen yleistysiksi. Tällä pohdinnalla on merkitystä käytännössä sikäli, että keskiävelviritys ei ole täysin tyydyttävä puhtaassa muodossaan tavanomaisessa duuri-mollitonalityteettiin perustuvassa musiikissa, vaan on järkevä poiketa suurterssipuhtaudesta enemmän tai vähemmän tasavireisen järjestelmän suuntaan.

Jos kohdassa 5.2 läpikäyty keskiävelviritystä koskenut tarkastelu toistetaan siten, että suurterssiehdot (5) korvataan vaatimuksella $x_{i+4} =$

$rx_i, i = 0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 10$, missä r ei enää välttämättä ole $5/4$, päädytään ratkaisuun

$$y_i = (5/4 \cdot r)^{1/4} S^{1/4} = 3/4 \cdot (4/r)^{1/4}, i = 0, 1, 2,$$

missä muuttujat y_i on määritelty kuten aikaisemminkin muodossa

$$y_i = 3/4 \cdot \frac{x_{i+5}}{x_i}, i = 0, 1, 2.$$

Vastaavat x_i -arvot on lueteltu kohdassa 5.2 laaditun taulukon viimeisessä sarakkeessa. Tähän tulokseen, jossa kvartin suhdeluku on siis $(4/r)^{1/4}$, kvintin $(4r)^{1/4}$, suurterssin r ja suursekunnin $r^{1/2}$, johdutaan välittömästi myös muuntamalla kohdan 3.1 selostusta siten, että siinäkin suurterssin suhdelukuna on r luvun $5/4$ asemasta.

Ratkaisu yhtyy luonnollisesti puhtaan keskisävelvirityksen mukaiseen, kun $r = 5/4$. Toisaalta havaitaan, että, kun $r = 2^{1/3} = 1.25992$, mikä on suurterssin tasavireinen suhdeluku, tulokseksi saadaan juuri tasavireinen järjestelmä. Annettaessa parametrin r vaihdella välillä (1.25, 1.25992) syntyy erilaisia keskisävel- ja tasavireisen järjestelmän välimuotoja. Täten tämän yhden ainoan parametrin avulla voidaan nyt esitetyssä virityskaavion erikoistapauksessa säätää viritystä näiden tunnettujen järjestelmien välillä. Kaikille välimuodoille ovat yhteisiä keskisävelvirityksen olennaiset piirteet, kahdeksan »hyvän» suurterssin suhdelukujen samanarvoisuus ja Wolf-intervallia lukuunottamatta toisaalta kvinttien ja toisaalta kvarttien suhdelukujen samanarvoisuus. Siksi on luontevaa nimittää ratkaisua yleistetyksi keskisäveljärjestelmäksi.

Koska tulos on samassa mielessä säännöllinen kuin keskisäveljärjestelmä, tavoiteltaessa määrätyn r -arvon mukaista ratkaisua ei ole tarpeen turvautua tietokoneohjelmaan, vaan riittää laskea tärkeimpien intervallien suhteelliset huojunnat. Parametrin r vaihtelun vaikutuksesta huojuntoihin saa käsityksen seuraavasta taulukosta.

r	suhteelliset huojunnat			huojunta intervaleissa (hz)		
	suurterssit $4r - 5$	kvartit $3(4/r)^{1/4} - 4$	kvintit $2(4r)^{1/4} - 3$	(a_0, c_{11})	(a_0, d_1)	(a_0, e_1)
1.250	0.0000	0.01244	-0.00930	0.00	2.74	-2.05
1.251	0.0040	0.01164	-0.00870	0.88	2.56	-1.91
1.252	0.0080	0.01084	-0.00811	1.76	2.38	-1.78
1.253	0.0120	0.01004	-0.00751	2.64	2.21	-1.65
1.254	0.0160	0.00924	-0.00691	3.52	2.03	-1.52
1.255	0.0200	0.00844	-0.00632	4.40	1.86	-1.39
1.256	0.0240	0.00764	-0.00572	5.28	1.68	-1.26
1.257	0.0280	0.00684	-0.00512	6.16	1.50	-1.13
1.258	0.0320	0.00605	-0.00453	7.04	1.33	-1.00
1.259	0.0360	0.00525	-0.00393	7.92	1.16	-0.86
1.25992	0.0397	0.00452	-0.00339	8.73	0.99	-0.75

Pyrittäessä keskisävelviritykseen käytännössä kokemusteni mukaan vaikuttaa siltä, että arvolla $r = 1.255$, joka on vaihtelualueen puolivälissä, syntyy viritys, joka tuntuu parhaalta vanhan cembalomusiikin esittämisessä. Tulos on luonteeltaan vielä selvästi keskisävelvirityksen kaltainen, mutta vailla puhtaan muodon pahimpia outouksia. Suurterssit ovat suhteellisilta epäpuhtausarvoiltaan (0.02) jo noin kaksinkertaisia verrattuina kvartteihin (0.0084) ja kolminkertaisia verrattuina kvintteihin (−0.0063), mutta nämä suhteet vastaavat järkevällä tavalla korvan kykyä sopeutua eriasteisten intervallien epäpuhtauteen. »Hyvien» suurterssien huojuunat oktaavialalla (a_0, a_1) ovat välillä 4 Hz – 7 Hz ja siten vielä kohtuullisia.

Tultuani kokeellisesti mainittuun tulokseen löysin miellyttäväksi yllätyksekseni tiedon¹⁵, että tunnettu soitinten rakentaja Gottfried Silbermann (1663–1733) olisi uruissaan käyttänyt yleistettyä keskisävelviritystä, jossa suurterssejä levennettiin (logaritmisella asteikolla) kolmasosalla syntonisesta kommasta, jolloin kvintit kapenivat kuudesosalla kommasta. Tulkintani mukaan suurterssin leventäminen z komman verran tarkoittanee, että $\log r - \log(5/4) = z \cdot \log S$ eli $r = (5/4) \cdot S^z$. Koska Silbermannin z olisi siis ollut $1/3$, saadaan $r = 1.2552$, mikä on käytännössä sama kuin oma suositukseni.

Barbour mainitsee alkuperäisiin lähteisiin viitaten kaiken kaikkiaan seuraavat ehdotukset, jotka esitystapani mukaisesti ovat:

	z	r	
Aron (1523)	0	1.25	suurterssi puhdas ($5/4$)
Salinas (1577) ¹⁶	$-1/3$	1.2448	pienterssi puhdas ($6/5$)
Zarlino (1571)	$-2/7$	1.2456	
Rossi (1666)	$1/9$	1.2517	
Rossi	$1/5$	1.2531	
Silbermann	$1/3$	1.2552	

Bachin tiedetään suosineen tavallista »terävämpiä» terssejä¹⁷, mikä käsitykseni mukaan merkitsee r -arvoa, joka on suurempi kuin 1.255. Onhan tunnettua, että Silbermannin urkuviritystä pidettiin »vanhan aikaisena».

Suuruusluokkaa $r = 1.255$ olevilla arvoilla yleistetty keskisävelviritys on 1500- ja 1600-lukujen tavanomaisten cembalosävellysten esittämisessä nimenomaan cembalolla mielestäni yleensä parempi kuin tasavireinen. Epäkohtana tosin on jatkuvasti sävellajisidonnaisuus, mutta tämä ei cembalolla ole mikään hankala rajoitus, sillä siirtyminen sävellajiryhmästä toiseen saadaan aikaan vaihtamalla vain yhden tai muutamien sävelen viritystaso. Tämä toimitus vie aikaa korkeintaan pari minuuttia. Seuraava taulukko kuvaa, miten sävellajivaihdokset hoidetaan, kun lähtökohtana on C-duurikeskeinen yleistetty keskisävelviritys.

¹⁵ Lloyd (1954) s. 384, Barbour s. 72, 89

¹⁶ Salinas ja Zarlino esittivät suurterssejä kavennettaviksi!

¹⁷ Lloyd (1954) s. 379

keskussävel

kvintti-

ympyrässä

muunnettavat

sävelet

b	f	c	g	d	a
gis	gis	—	es	es	es
cis				b	b
					f
As	Es	B	F	C	G
Es	B	F	C	G	D
B	F	C	G	D	A
F	C	G	D	A	E
C	G	D	A	E	H
G	D	A	E	H	Fis
f	c	g	d	a	e
c	g	d	a	e	h
g	d	a	e	h	fis

Esimerkiksi siirtyminen viritykseen, joka antaa hyvän intonaation f-mollissa, tapahtuu korottamalla säveliä gis ja cis, »gis säveleksi as ja cis säveleksi des», siten, että epäpuhtaat terssit (as, c) ja (des, f) tulevat yhtä hyviksi kuin niiden vieressä olevat terssit. »Oikean» virityksen valinnassa täytyy luonnollisesti ottaa huomioon mahdolliset tonali-teetissa tapahtuvat vaihtelut sävellyksen aikana.

On mielenkiintoista kokeilla keskisävelviritystä myös 1700-luvun alkupuolen musiikkiin. Vaikuttaa siltä, että esim. ainakin useimmat François Couperinin (1668–1733) cembalosarjoista, joita on 27, olisi sävelletty keskisävelvirityksen rajoituksia kunnioittaen.¹⁸ Joissakin sarjoissa Couperin ylittää lievästi tämän järjestelmän rajat, mutta se lie-nee monesti harkittu teko kuulijan hämmästyttämiseksi. Parhaita löy-tämiäni esimerkkejä rajojen tahallista ylittämistä on 23. sarjan osa *Les Tricoteuses* (Kutojat), jossa kilkutellaan hilpeästi hyvin soivassa F-duurissa kohti lopussa olevaa mollitaitetta. Siinä toistuu yllättäen nel-jästi keskisävelvirityksessä hurjasti dissonoiva intervalli (fis, des). Näi-den nuottien yläpuolelle säveltäjä on kirjoittanut *Mailles-lâchées* (löy-hiä silmukoita).

Myös monet Bachin klaveerisävellykset soivat mainiosti keskisävel-viritteisellä instrumentilla, vaikka hän tunnetusti ainakin myöhemmin (*Das Wohltemperierte Clavier I* valmistui v. 1722) on ollut tasavireisen järjestelmän kannattaja. Muistettakoon kuitenkin aikaisemmin, koh-dassa 3.2 mainitut käsitykset siitä, mitä käsitteellä »wohl temperiert» on tarkoitettu. On todennäköistä, että Bach on virittäessään klavikor-dia ja cembaloa vähitellen terävöittänyt terssejä yhä enemmän ja tul-lut siten ainakin hyvin lähelle tasavireistä järjestelmää.

Menemättä enempää yksityiskohtiin todettakoon vielä, että keski-sävelviritys lienee lopullisesti syrjäytynyt varhaimmin, viimeistään 1600-luvun loppupuolella Italiassa ja sen jälkeen Saksassa. Sen sijaan Rans-kassa ja Englannissa se, käsitykseni mukaan, säilytti asemansa kauemmin.

¹⁸ Barbour on tullut samaan tulokseen paitsi Couperinin myös Telemannin (1681–1767) suhteen.

7. Loppupäätelmiä.

Yleistettyä keskisävelviritystä tutkien ja kokeillen olen päätenyt arveluun, että tasavireinen järjestelmä on kehittynyt vähitellen keskisäveljärjestelmästä suurterssin suhdeluvun r liukuessa kohti ylärajaansa ja vasta käytännöllisen vakiintumisen jälkeen lienee keksitty sen teoreettinen perusta. On mahdollista, että useat muusikot, virittäjät ja tutkijat ovat toisistaan riippumatta muuttaneet viritystapaansa tähän suuntaan. Tuskin koskaan saadaan tietää, kuka ensimmäisenä pääsi ylärajalle.

Vaikka olenkin suosittanut tiettyä yleistettyä keskisävelviritystä vanhan cembalomusiikin esittämiseen, on jokaisen säveltäjän ja joskus jopa yksittäisen sävellyksen kohdalla erikseen harkittava, mikä on paras viritystapa.

Esittämäni yleisen virityskaavion käytännöllinen hyöty on toistaiseksi rajoittunut siihen, että olen sen avulla saattanut jäljittää eräitä viritukseen liittyviä perinteitä. Tärkeintä on kuitenkin, että kaavio tarjoaa yhtenäisen teoreettisen kuvaustavan kaikille ajateltavissa oleville viritysjärjestelmille. Mahdollisuus kehittää jopa uusia, tavanomaisista poikkeavia järjestelmiä virituksen suhteen hyvin joustavalle cembalolle kiinnostanee myös nykysäveltäjiä.

Kirjallisuutta:

- Barbour, J. Murray, *Bach and the Art of Tempering*. Musical Quarterly, Vol. XXXIII, s. 64–89, 1947.
- Dahlhaus, Carl, *Temperament*. Riemann Musik Lexikon, Sachteil, s. 943, 1967.
- Dart, Thurston, *The Interpretation of Music*. London 1954.
- Lloyd, Ll. S., *Temperaments*. Grove's Dictionary of Music and Musicians, fifth edition, Vol. VIII, s. 373–391, 1954.
- Lloyd, Ll. S., *Intervals, Scales and Temperaments*. Edited by Hugh Boyle. London 1963.
- Maitland, J. A. Fuller and Squire, W. Barclay (editors), *The Fitzwilliam Virginal Book*. Leipzig 1899.
- Russell, Raymond, *The Harpsichord and Clavichord*. London 1959.
- Taylor, C. A., *The Physics of Musical Sounds*. London 1965.
- Tolonen, Jouko, *Mollisoinnun ongelma ja unitaarinen intervalli- ja sointutulkinta*. Helsinki 1969.

On Tuning Systems. The starting point for this study has been the author's experiences in harpsichord tuning. As the sound of the harpsichord is exceptionally rich in overtones the insufficiency of previous tuning methods is understandable. Thus tuning problems of the harpsichord are more severe than those of many other instruments with fixed intonation, for instance the pianoforte. The equal temperament cannot quite successfully meet the requirements of old harpsichord music in which the mean tone temperament in its various forms is essentially the more suitable.

To cope with the problem of tuning generally a new mathematical model based on the principle of least squares has been developed. This general tuning model makes it possible to realise every imaginable temperament by choosing suitable weights for the different intervals in the scale. Both equal and mean tone temperaments are proved merely to be special cases of the general model. The tuning model has been applied so far only to tracing the old tuning conventions which remain in common between the equal and mean tone temperaments. The main intention is, however, to use the model for inventing entirely new tuning systems for the demands of modern harpsichord music.