

# SURVO-RISTIKOISTA

SEPPO MUSTONEN  
2.6.2006

Olen viime kuukausina tarjonnut ratkaistavaksi tehtäviä, joita sanon Survo-ristikoiksi, omassa keskusteluryhmässämme ([www.survo.fi](http://www.survo.fi) ⇒ Keskustelu). Niiden pohtiminen on kiehtonut yllättävän monia myös survoilijoiden ystäviä ja sukulaisia. Useat ratkovat Survo-ristikoita päässään käyttäen vain kynää ja paperia. Varsinkin vaikeitten tehtävien selvittämisessä Survon erilaiset laskennalliset keinot tukevat toimintaa.

Tehtävänä on täyttää  $m \times n$  -taulukko luvuilla  $1, 2, \dots, mn$  siten siten, että jokainen näistä luvuista esiintyy vain kerran ja että rivi- ja sarakesummat täsmäävät reunoilla annettuihin lukuihin. Lisäksi taulukkoon on saatettu sijoittaa joitakin lukuja jo valmiiksi, jottei ratkaiseminen olisi liian hankalaa eikä mahdollisia ratkaisuja olisi yhtä enempää.

## 1. ESIMERKKI 1

Tarkastellaan  $3 \times 4$  -ristikkoa

	6			30
8				18
		3		30
27	16	10	25	

Siis esim. 1. rivin lukujen summa on 30 eli puuttuvien kolmen luvun summa on 24. Vastaavasti 2. sarakkeen summa on 16, joten kahden puuttuvan luvun summa on 10.

Taulukosta puuttuvat 9 lukua ovat  $1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12$ . Ratkaisu kannattaa yleensä aloittaa rivistä tai sarakkeesta, jossa on vähiten puuttuvia lukuja. Tässä ristikossa sarakkeet 1, 2 ja 3 ovat sellaisia. Sarake 1 ei kuitenkaan ole kiitollinen sillä puuttuvien lukujen summa 19 voidaan esittää sääntöjen sallimalla tavalla useassa muodossa (esim.  $19 = 7 + 12 = 12 + 7 = 9 + 10 = 10 + 9$ ). Sarakkeella 2 puuttuvien lukujen summa on 10, jolla on vain yksi mahdollinen esitys  $10 = 1 + 9$  sillä muut vaihtoehdot  $10 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6$  sulkeutuvat pois jo taulukossa esiintyvien lukujen johdosta.

Lukua 9 ei voi sijoittaa riville 2, koska silloin tuon rivin summa ylittäisi arvon 18. Siis taulukko täydentyy aluksi muotoon

	6			30
8	1			18
	9	3		30
27	16	10	25	

Nyt ensimmäiselle sarakkeelle jää vain vaihtoehto  $27 - 8 = 19 = 7 + 12 = 12 + 7$ . Luku 7 ei voi kuitenkaan olla rivillä 1, sillä sen puuttuvien lukujen summa olisi  $30 - 7 - 6 = 17$ , jonka ositus kahden luvun summaksi sallitulla tavalla ei onnistu. Taulukko täydentyy näin muotoon

12	6			30
8	1			18
7	9	3		30
27	16	10	25	

jolloin viimeisen rivin viimeiseksi luvuksi tulee  $30 - 7 - 9 - 3 = 11$ :

12	6			30
8	1			18
7	9	3	11	30
27	16	10	25	

Ensimmäisellä rivillä puuttuvien lukujen summa on  $30 - 12 - 6 = 12$ , jonka ainoa mahdollinen ositus on  $12 = 2 + 10$  vieläpä niin, että luku 2 tulee kolmanteen sarakkeeseen; 10 tuolla paikalla aiheuttaisi sarakesumman 10 ylityksen:

12	6	2	10	30
8	1			18
7	9	3	11	30
27	16	10	25	

Ristikko täydentyy nyt välittömästi lopulliseen muotoonsa

12	6	2	10	30
8	1	5	4	18
7	9	3	11	30
27	16	10	25	

## 2. ESIMERKKI 2

Myös tämä  $2 \times 10$  -ristikko on helppo etenkin, jos huomaa, että ensimmäinen rivisumma 55 voi syntyä vain luvuista  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ .

		7					8			55
	13								16	155
22	18	22	30	12	24	18	25	14	25	

Se täydentyy välittömästi muotoon

	5	7					8		9	55
	13	15					17		16	155
22	18	22	30	12	24	18	25	14	25	

Koska ensimmäisen rivin luvut ovat kaikki korkeintaan 10, neljännen sarakkeen summa 30 voi syntyä vain muodossa  $30 = 10 + 20$  eli saadaan

	5	7	10				8		9	55
	13	15	20				17		16	155
22	18	22	30	12	24	18	25	14	25	

Tämän jälkeen lopullinen ratkaisu kehittyy yksinkertaisin askelin esim. seuraavasti:

	5	7	10	1			8		9	55
	13	15	20	11			17		16	155
22	18	22	30	12	24	18	25	14	25	

	5	7	10	1	6		8		9	55
	13	15	20	11	18		17		16	155
22	18	22	30	12	24	18	25	14	25	

3	5	7	10	1	6		8		9	55
19	13	15	20	11	18		17		16	155
22	18	22	30	12	24	18	25	14	25	

3	5	7	10	1	6	4	8		9	55
19	13	15	20	11	18	14	17		16	155
22	18	22	30	12	24	18	25	14	25	

3	5	7	10	1	6	4	8	2	9	55
19	13	15	20	11	18	14	17	12	16	155
22	18	22	30	12	24	18	25	14	25	

## 3. ESIMERKKI 3

Edellisten kaltaisista, helpoista Survo-ristikoista selviää peruslaskutaidolla ja yksinkertaisilla päätelmillä.

Näytteenä siitä, miten Survoa – erityisesti sen kombinatorisia tehtäviä käsittelevää COMB-ohjelmaa – voi käyttää hyväksi vaikeampia ristikoita ratkaistaessa, katseltakoon seuraavaa  $5 \times 5$ -tehtävää, missä rivit on osoitettu numeroin 1–5 ja sarakkeet kirjaimin A–E.

	A	B	C	D	E	
1				2	3	35
2	14	4			12	57
3	8	6		13		65
4	5					83
5		9	25		11	85
	62	35	77	81	70	

Tässä pääsee mielestäni vähimmällä, jos aloittaa tutkimalla, mitkä ovat rivin 1 kolme puuttuvaa lukua. On selvitettävä, millä eri tavoin saadaan 3 erisuuren kokonaisluvun summaksi  $35 - 2 - 3 = 30$ , kun ei saa käyttää yhteenlaskettavina

taulukossa jo olevia lukuja. Mahdolliset vaihtoehdot selviävät nopeimmin Survon seuraavanlaisella COMB-komentokaaviolla. Jo käytetyt luvut kerrotaan COMB-komennolle täsmennyksellä OFF=2,3,14,4,12,8,6,13,5,9,25,11 ja kaikki luvun 30 ositukset (partitiot) 3 eri luvun (DISTINCT=1) summaksi saadaan komennolla

```
-----
OFF=2,3,14,4,12,8,6,13,5,9,25,11
COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,30,3  DISTINCT=1
Partitions 3 of 30: N[P]=2
1 7 22
1 10 19
-----
```

Tarjolla on siis kaksi vaihtoehtoista ositusta  $30 = 1 + 7 + 22 = 1 + 10 + 19$ . Tutkitaan B-saraketta ja käytetään jälleen COMB-komentoa näin:

```
-----
35-4-6-9=16 on puuttuvien lukujen summa.
COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,16,2  DISTINCT=1
Partitions 2 of 16: N[P]=1
1 15
-----
```

Koska luku 15 ei voi olla rivillä 1 (ositusvaihtoehtojen estäessä) on B1=1 ja B4=15:

	A	B	C	D	E	
1		1		2	3	35
2	14	4			12	57
3	8	6		13		65
4	5	15				83
5		9	25		11	85
	62	35	77	81	70	

Tutkitaan nyt A-saraketta:

```
-----
62-14-8-5=35
OFF=2,3,14,4,12,8,6,13,5,9,25,11,1,15 (Huom. 1 ja 15 mukaan)
COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,35,2  DISTINCT=1  MAX=24
Partitions 2 of 35: N[P]=2
16 19
17 18
-----
```

Koska rivillä 1 ei voi olla lukua 17 tai 18, rivin 1 oikea ositus on  $19 + 1 + 10$  eli A1=19 ja C1=10 sekä lisäksi A5=16.

Tullaan siis tilanteeseen

	A	B	C	D	E	
1	19	1	10	2	3	35
2	14	4			12	57
3	8	6		13		65
4	5	15				83
5	16	9	25		11	85
	62	35	77	81	70	

jolloin D5 on  $85 - 16 - 9 - 25 - 11 = 24$

	A	B	C	D	E	
1	19	1	10	2	3	35
2	14	4			12	57
3	8	6		13		65
4	5	15				83
5	16	9	25	24	11	85
	62	35	77	81	70	

Katsotaan riviä 2 ja saraketta D:

-----  
Rivi 2:

$57 - 14 - 4 - 12 = 27$

OFF=2,3,14,4,12,8,6,13,5,9,25,11,1,15,19,10,16,24

COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,27,2 DISTINCT=1 MAX=23

Partitions 2 of 27: N[P]=1

7 20

Sarake D:

$81 - 2 - 13 - 24 = 42$

COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,42,2 DISTINCT=1 MAX=23

Partitions 2 of 42: N[P]=1

20 22  
-----

Tällöin on  $D_2=20$  ja edelleen  $C_2=7$ ,  $D_4=22$ :

	A	B	C	D	E	
1	19	1	10	2	3	35
2	14	4	7	20	12	57
3	8	6		13		65
4	5	15		22		83
5	16	9	25	24	11	85
	62	35	77	81	70	

Ristikosta puuttuu enää neljä lukua, jotka ovat 17,18,21,23, joten helposti saadaan lopullinen ratkaisu

	A	B	C	D	E	
1	19	1	10	2	3	35
2	14	4	7	20	12	57
3	8	6	17	13	21	65
4	5	15	18	22	23	83
5	16	9	25	24	11	85
	62	35	77	81	70	

## 4. ESIMERKKI 4

Vielä hankalampi lienee seuraava Survo-ristikko, jonka kyllä pystyy selvittämään apuneuvoittakin. Tästä on osoituksena *Olli Mustosen* ratkaisu, joka sujui näin (suora lainaus hänen lähettämästään viestistä):

	A	B	C	D	E	
1	24					60
2	19			11	13	88
3		21				40
4			14	6		70
5		12			17	67
	64	84	56	36	85	

Huomasin, että riville 2 tarvitaan kahden luvun summana 45. Käytettävissä olevilla luvuilla tämä onnistuu vain kahdella tavalla: 20+25 ja 22+23. Suuria lukuja tarvitaan myös sarakkeessa E – ongelmana on ruutu E3, jossa ei voi olla kovin suurta lukua, koska rivin 3 vielä tyhjänä olevien neljän ruudun summa saa olla vain 19. Pienen tutkimisen jälkeen tulin siihen tulokseen, että E3 voi olla vain 7, 8 tai 10. Sarakkeen E jäljelle jäävän kahden ruudun summa voi siis olla 45, 47 tai 48 – nämä summat voivat muodostua vain luvuista 20, 22, 23 ja 25 eri tavoin yhdisteltyinä. Koska kahta näistä neljästä luvusta tarvitsemme rivillä 2, ja siellä summan täytyy olla 45, voimme päätellä, että myös jäljelle jäävät kaksi suurta lukua ruuduissa E1 ja E4 saavat summakseen 45. Tämä puolestaan tarkoittaa sitä, että E3 täytyy olla 10.

	A	B	C	D	E	
1	24					60
2	19			11	13	88
3		21			10	40
4			14	6		70
5		12			17	67
	64	84	56	36	85	

Kirjoitin nyt listan kaikista mahdollisista ratkaisuista sarakkeelle B. Näistä saatiin pois kaikki ne, joissa esiintyi luku 10 (tarvitaan ruudussa E3) sekä sellaiset, joissa tarvittiin kahta lukua joukosta 20, 22, 23 ja 25 – nämä kaikki luvut tarvitsimme ruutuihin B2, C2, E1 ja E4. Tein vastaavanlaisen listan myös rivin 4 tilanteesta.



Näiden toimenpiteiden jälkeen sarakkeelle B jäi kaksi mahdollista ratkaisua: 15,16,20 tai 8,18,25. Tästä voimme jo päätellä, että näissä ratkaisuissa esiintymättömien lukujen 22 ja 23 täytyy sisältyä sarakkeeseen E, joista toisen täytyy siis esiintyä rivillä 4, ruudussa E4. Ruudussa B4 esiintyvä luku täytyy vuorostaan olla alle 20. Ainoa aiemmin listaamistani rivin 4 ratkaisusta, joka täyttää kaikki aiemmin mainitut ehdot (mukana täytyy olla joko 22 tai 23, molempien muiden lukujen täytyy olla alle 20, luku 10 ei voi esiintyä rivillä) on 9,18,23. Tästä seuraa, että E4 on 23 ja vastaavasti E1 on 22. Tästä seuraa myös, että ruudussa B4 täytyy olla joko 9 tai 18. Sarakkeen B ratkaisu on siis 8,18,25 – B2 on 25, B4 on 18 ja näin ollen B1 on 8. C2 on 20.

	A	B	C	D	E	
1	24	8			22	60
2	19	25	20	11	13	88
3		21			10	40
4		18	14	6	23	70
5		12			17	67
	64	84	56	36	85	

Vastaavasti A4 on 9 ja A3+A5 täytyy olla yhteensä 12 – jäljellä olevilla luvuilla ainoa mahdollisuus on 5+7. 7 on liian suuri luku ruutuun A3, joten A3 on 5 ja A5 on 7.

	A	B	C	D	E	
1	24	8			22	60
2	19	25	20	11	13	88
3	5	21			10	40
4	9	18	14	6	23	70
5	7	12			17	67
	64	84	56	36	85	

Näin ollen C5+D5 on 31, ainoana ratkaisuna jäljellä olevilla luvuilla 15+16. Tässä vaiheessa ratkaistavaksi jää enää se, kummin päin luvut 15 ja 16 ovat rivillä 5 ja se, miten sijoittuvat pienet luvut 1, 2, 3 ja 4 ruutuihin C1, D1, C3 ja D3.

Pienen tutkimisen jälkeen oikea ratkaisu löytyy helposti:

	A	B	C	D	E	
1	24	8	4	2	22	60
2	19	25	20	11	13	88
3	5	21	3	1	10	40
4	9	18	14	6	23	70
5	7	12	15	16	17	67
	64	84	56	36	85	

Myös *Anna-Riitta Niskanen* on ratkaissut tämän tehtävän.

## 5. SURVO-RISTIKKOJEN LAADINTA

Ristikotehtävien luominen on periaatteessa helppoa, mutta ratkaisun yksikäsitteisyyden varmistaminen edellyttää ratkaisuohjelmaa, jonka tein Survo-modulina SUMMAT. Esim. edellinen  $5 \times 5$  -peli syntyi Survon matriisitulkin avulla seuraavasti:

```
-----
FILE CREATE SUMMAT,10,2
FIELDS:
1 N 2 X          numerot 1,2,3,...
2 N 8 Y          satunnaislukuja X-lukujen sekoitukseen
END

FILE INIT SUMMAT,25
VAR X=ORDER TO SUMMAT
VAR Y=rand(2006) TO SUMMAT
m=5 n=5

FILE SORT SUMMAT BY Y TO SUMMAT2 / X-arvot satunnaiseen järjestykseen
MAT SAVE DATA SUMMAT2 TO A / VARS=X Muunto m*n alkion vektoriksi
MAT A=VEC(A,m) / Muunto mxn-matriisiksi
MAT A2=ZER(m+1,n+1) / Tähän kootaan alkiot ja summat.
MAT A2(1,1)=A
MAT S=SUM(A)
MAT A2(m+1,1)=S
MAT S=SUM(A')
MAT A2(1,n+1)=S
MAT S=SUM(S)
MAT A2(m+1,n+1)=S
MAT A=A2
MAT A(1,1)=ZER(m,n) / A-matriisin alkioden nollaaminen, summat jäävät
MAT NAME A AS A
```

```

Valittujen alkioiden kopiointi ratkaisumatriisista A2:
MAT A(1,1)=A2(1,1)
MAT A(2,1)=A2(2,1)
MAT A(2,4)=A2(2,4)
MAT A(2,5)=A2(2,5)
MAT A(3,2)=A2(3,2)
MAT A(4,3)=A2(4,3)
MAT A(4,4)=A2(4,4)
MAT A(5,2)=A2(5,2)
MAT A(5,5)=A2(5,5)
MAT NAME A AS A

```

Osan alkioista valitsin suoraan ja loput niin, että ratkaisuojelma SUMMAT antaa vain yhden mahdollisen ratkaisun.

Tehtävän asettelu on valmis:

```
LOADM A, (2), CUR+1
```

```

A
      1  2  3  4  5 Sum
1      24  0  0  0  0  60
2      19  0  0  11  13  88
3       0  21  0  0  0  40
4       0  0  14  6  0  70
5       0  12  0  0  17  67
Sum     64  84  56  36  85  325

```

Ratkaisuojelma SUMMAT toimii hyvin alkeellisen, osittain satunnaistetun algoritmin mukaisesti. Se aloittaa sijoittamalla puuttuvat luvut umpimähkään taulukkoon (satunnaistettu ristikko) ja yrittää sitten systemaattisin vaihdoin saada lasketut rivi- ja sarakesummat mahdollisimman lähelle oikeita summia.

Menettely johtaa joko oikeaan ratkaisuun tai (kuten yleensä) se päättyy pattitilanteeseen, jossa se ei enää pysty parantamaan ratkaisuksi kelpaamatonta tulosta. Jälkimmäisessä vaiheessa tapahtuu ”mutaatio”, jossa kaksi tai useampia lukuja vaihtaa paikkojaan satunnaisesti. Tämän jälkeen yritetään parantaa tulosta jälleen systemaattisesti, kunnes joko päädytään ratkaisuun tai joudutaan turvautumaan uuteen mutaatioon.

Ristikon vaikeutta kuvaavaksi tunnusluvuksi olen ottanut tarvittujen mutaatiokertojen lukumäärän keskiarvon, kun ratkaisu toistetaan esim. 1000 kertaa lähtemällä joka kerran täysin satunnaistetusta ristikosta. Edellä kuvatuilla esimerkkiristikoilla 1–4 vaikeusasteet näin laskettuna ovat 30,20,30 ja 560.

Mutaatioiden lukumäärä näyttää noudattavan (kuten sopii odottaa) likimain geometrista jakaumaa. Olen tarkkaillut joissain esimerkkiristikoissa, mikä on kussakin mutaatioissa paras vaihtojen lukumäärä. Kolme vaihtoa näyttää ainakin  $5 \times 5$ -ristikoilla antavan keskimäärin nopeimmin ratkaisun ja ratkaisu on luokkaa kolme kertaa nopeampi kuin lähettäessä pattitilanteen jälkeen kokonaan uudelleen satunnaistetusta ristikosta.

Olen sisällyttänyt ratkaisuojelmaan myös option, jolla se tutkii ratkaisun yksikäsitteisyyttä ratkaisemalla tehtävän toistuvasti ja jos se havaitsee, että syntyy yksikin ensimmäisestä ratkaisusta eroava tulos, tästä tulee ilmoitus.

## 6. AVOIMISTA RISTIKOISTA

Omalla tavallaan mielenkiintoisia (ja hankalia) ovat avoimet Survo-ristikot, joissa on annettuna vain rivi- ja sarakesummat ja joilla on silti vain yksi ratkaisu. Joka tapauksessa esim. sellainen avoin  $m \times n$ -ristikko, jonka ratkaisussa luvut  $1, 2, \dots, mn$  ovat vaaka- tai pystyriveittäin suuruusjärjestyksessä, ratkeaa yksikäsitteisesti, mutta näitä on muitakin ja ilmeisesti jopa sitä enemmän, mitä suurempi on ristikko.

Yksikäsitteisesti ratkeavat ristikot A ja B määritellään olennaisesti erilaisiksi, jos ratkaistua ristikkoa A ei voi palauttaa ratkaistuksi ristikoksi B vaihtamalla rivien tai sarakkeiden järjestystä eikä transponoimalla (tapauksessa  $m = n$ ). Olkoon  $S(m, n)$  olennaisesti erilaisten, yksikäsitteisesti ratkeavien, avoimien  $m \times n$ -Survo-ristikoiden lukumäärä. On ilmeistä, että  $S(1, 1) = 1$  ja  $S(2, 2) = 1$ . Ainoa yksikäsitteisesti ratkeava  $2 \times 2$ -ristikko on

		3
		7
4	6	

1	2	3
3	4	7
4	6	

sillä esim. seuraavalla ristikolla (ankarasti ottaen)

		3
		7
5	5	

1	2	3
4	3	7
5	5	

2	1	3
3	4	7
5	5	

on kaksi ratkaisua. Sarakesummien (samoin kuin rivisummien) tulee olla keskenään erisuuria, jotta ratkaisu voisi olla yksikäsitteinen.

*Reijo Sund* kiinnitti ensimmäisenä huomiota näihin avoimiin ristikoihin ja selvitti, että olennaisesti erilaisia  $3 \times 3$ -ristikoita on 38 kappaletta eli  $S(3, 3) = 38$ . Hän päätyi lähtemällä  $9! = 362880$  mahdollisesta ristikosta tähän tulokseen suoraan Survon perustoimintojen avulla, mikä on nähtävissä liitteenä. Alla on taulukoituna noiden ristikkojen rivi- ja sarakesummat sekä vaikeusasteet V.

Rivit	Sarakkeet	V	Rivit	Sarakkeet	V
6 17 22	11 14 20	16	9 16 20	8 14 23	15
7 14 24	11 15 19	13	9 16 20	8 15 22	23
7 15 23	10 15 20	21	10 13 22	8 16 21	22
7 16 22	9 16 20	28	10 14 21	7 16 22	15
7 16 22	10 15 20	26	10 14 21	8 14 23	25
7 17 21	9 15 21	16	10 15 20	6 18 21	24
7 17 21	10 15 20	26	10 15 20	9 12 24	18
7 17 21	11 14 20	46	10 15 20	9 13 23	31
7 17 21	11 16 18	47	10 16 19	6 17 22	22
8 14 23	10 15 20	21	10 16 19	7 15 23	13
8 15 22	8 17 20	15	10 16 19	8 13 24	16
8 15 22	9 17 19	30	11 14 20	7 15 23	19
8 15 22	10 13 22	15	11 14 20	8 13 24	20
8 15 22	10 14 21	35	11 15 19	6 16 23	18
8 15 22	11 13 21	47	11 15 19	7 15 23	32
9 13 23	9 15 21	20	11 16 18	7 15 23	31
9 13 23	10 16 19	36	12 14 19	7 15 23	29
9 14 22	8 17 20	23	12 14 19	9 13 23	59
9 15 21	8 15 22	31	12 15 18	6 15 24	19

Ratkaisuohjelman antamiin ristikkojen vaikeusarvoihin tulee suhtautua varauksellisesti. Joka tapauksessa vaikeimmaksi arvioitu (toiseksi viimeinen arvolla 59) on hankalimpia. Se ratkeaa seuraavalla päättelyllä (ote Survon toimituskentästä):

-----  
Ratkaistaan ristikko

```

A B C
1 * * * 12
2 * * * 14
3 * * * 19
  9 13 23

```

Aloitetaan C-sarakkeesta (jolla on ainoana yksikäsitteinen ositus):

COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,23,3 DISTINCT=1 MAX=9

Partitions 3 of 23: N[P]=1

6 8 9

```

A B C
1 * * 6 12  C-sarakkeen luvut järjestyssä vaille
2 * * 8 14
3 * * 9 19
  9 13 23

```

.....  
B-sarake:

OFF=6,8,9

COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,13,3 DISTINCT=1 MAX=9

Partitions 3 of 13: N[P]=2

1 5 7

2 4 7

Luku 7 on sarakkeessa B rivillä 2 tai 3

- ei rivillä 1, koska summa 12 ylittyisi.

.....  
A-sarake:

OFF=8,6,9,7

COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,9,3 DISTINCT=1 MAX=9

Partitions 3 of 9: N[P]=2

1 3 5

2 3 4

Luku 3 on sarakkeessa A.

.....

Olisiko B2=7?

Silloin olisi C2=6 ja A2=1

	A	B	C	
1	*	*	8	12
2	1	7	6	14
3	*	*	9	19
	9	13	23	

ja A-sarakkeessa  $9=3+1+5$ , mutta rivisumma 12 ylittyisi!

Siis B3=7.

	A	B	C	
1	*	*	6	12
2	*	*	8	14
3	*	7	9	19
	9	13	23	

B-sarakkeen alkuosan ainoa ositus on  $13-7=6=1+5$

- ei  $2+4$ , koska tämä johtaa heti ristiriitaan rivillä 1.

Tällöin on B1=1 ja B2=5,

koska B1=5 joko ylittää rivisumman 12 tai jos C1=6, A1 olisi 1.

	A	B	C	
1	*	1	6	12
2	*	5	8	14
3	*	7	9	19
	9	13	23	

.....  
Koska B2=5, C2 ei voi olla 8 tai 9 - siis C2=6 ja A2=3.

	A	B	C	
1	*	1	8	12
2	3	5	6	14
3	*	7	9	19
	9	13	23	

Väistämättä tällöin on A1=2 ja A3=4, jolloin C1=9 ja C3=8

	A	B	C	
1	2	1	9	12
2	3	5	6	14
3	4	7	8	19
	9	13	23	

-----

Olennaisesti erilaisten, avoimien Survo-ristikoiden lukumäärän laskeminen vaikeutuu huomattavasti suuremmilla  $m$ - ja  $n$ -yhdistelmillä. Olen ratkaisuohjelmallani saanut selvitettyksi, että  $S(3,4)=583$ . Koska mahdollisten ristikkojen lukumäärä on tällöin jo  $12!=479001600$ , on edullisempaa tarkastella ongelmaa kaikkien reunasummien yhdistelmien kautta eli tällöin mahdollisten ehdokkaiden määrä supistuu lukuun  $128*519=66432$ , mikä näkyy seuraavasta laskelmasta:

```
-----
Kaikkien lukujen summa 3x4-ristikossa on 12*13/2=78.
COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,78,3 DISTINCT=1 MIN=10 MAX=42 RESULTS=0
Partitions 3 of 78: N[P]=128
```

```
COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,78,4 DISTINCT=1 MIN=6 MAX=33 RESULTS=0
Partitions 4 of 78: N[P]=519
```

Olennaisesti erilaisten, avoimien  $4 \times 4$ -ristikkojen lukumäärän  $S(4,4)$  laskeminen edellyttää vielä tehokkaampia keinoja, sillä erilaisten reunasummayhdistelmien lukumäärä on  $2980*(2980-1)/2=4438710$ . Seminaarissamme vieraillut kombinatoristen algoritmien erikoistuntija *Petteri Kaski* on omilla ohjelmillaan saanut tulokseksi  $S(4,4) = 5327$ . Hän mallinsi tehtävän ns. täsmällisen peitteen ongelmaksi (exact cover problem) reunasummien antamin lisärajoittein.

Avoimet ristikot ovat yleensä vaativia. Esim. jo  $4 \times 4$  -ristikot tuottanevat suurta vaivaa, jollei käytetä jotain ratkaisuohjelmaa. Joskus ratkaisu saattaa kuitenkin löytyä melko suoraan hyvän oivalluksen kautta. *Kimmo Vehkalahti* selvitti ristikon

	A	B	C	D	E	F	
1							38
2							40
	8	9	10	16	17	18	

jonka vaikeusaste ratkaisuohjelmani mukaan on peräti 780, näin: Katsoin pareittain sarakkeita A,B,C ja D,E,F ja niiden yhtäaikaisia mahdollisuuksia:

	A	B	C	D	E	F
1	1+7	3+6	2+8	<b>a</b> 4+12	<b>6+11</b>	<b>8+10</b>
2	1+7	4+5	2+8	b 5+11	7+10	6+12
3	2+6	1+8	3+7	c 5+11	8+9	6+12
4	2+6	4+5	1+9	d 6+10	5+12	7+11
5	3+5	1+8	4+6	e 6+10	8+9	7+11
<b>6</b>	<b>3+5</b>	<b>2+7</b>	<b>1+9</b>	f 7+9	5+12	8+10
7	3+5	2+7	4+6			

Tästä näkyy, että ainoa sopiva yhdistelmä on 6a, ts.

A	B	C	D	E	F
3+5	2+7	1+9	ja 4+12	6+11	8+10

Taulukoimalla kaikki ensimmäisen rivin ositukset (55 kpl.)

-----  
 COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,38,6 DISTINCT=1 MAX=12

Partitions 6 of 38: N[P]=55

1 2 3 9 11 12

1 2 4 8 11 12

. . .

3 4 6 7 8 10

3 5 6 7 8 9

-----

ja poistamalla näistä sellaiset, joissa yhtäikää esiintyvät luvut 3,5 tai 2,7 tai 1,9 tai 4,12 tai 6,11 tai 8,10 päädytään vain yhteen ositukseen ja tulokseen

	A	B	C	D	E	F	
1	5	7	1	4	11	10	38
2	3	2	9	12	6	8	40
	8	9	10	16	17	18	



7. AVOIMEN  $4 \times 4$  -RISTIKON RATKAISU

Ainoa Survo-keskustelussa (huhti- toukokuussa 2006) antamani tehtävä, johon ei ole tullut yhtään ratkaisua, on seuraava avoin  $4 \times 4$  -ristikko:

	A	B	C	D	
1					14
2					28
3					44
4					50
	16	33	40	47	

Luonnostelen seuraavassa Survon toimituskentän otteessa ratkaisun.

-----  
On siis ratkaistava Survo-ristikko

	A	B	C	D	
1	*	*	*	*	14
2	*	*	*	*	28
3	*	*	*	*	44
4	*	*	*	*	50
5	16	33	40	47	

jonka vaikeusaste ratkaisuohjelmalla on 1150.

Näytetään ensin, että  $A_1=1$ .

Tarkastellaan ensimmäistä riviä:

Ositukset 14,4:

COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,14,4 DISTINCT=1 MAX=16

Partitions 4 of 14: N[P]=5

1 2 3 8

1 2 4 7

1 2 5 6

1 3 4 6

2 3 4 5

Tämän perusteella  $A_1$  on yksi luvuista 1,2,3,4,5,6,7,8.

Tutkimalla mahdollisia sarakkeen A (summa 16) osituksia voidaan aluksi sulkea vaihtoehdot 3,4,5,6,7,8 pois.

Esimerkkinä tapaus  $A_1=3$ :

.....  
Käydään läpi kaikki rivin 1 ositukset 16,4:

COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,16,4 DISTINCT=1 OFF=1,2,8

Partitions 4 of 16: N[P]=0

COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,16,4 DISTINCT=1 OFF=1,4,6

Partitions 4 of 16: N[P]=0

COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,16,4 DISTINCT=1 OFF=2,4,5

Partitions 4 of 16: N[P]=0

Siis  $A_1$  ei voi olla 3.

.....  
 Tapaus A1=2:

Osituksen 14,4 perusteella, rivin 1 kolme viimeistä lukua olisivat  
 1,3,8 tai 1,4,7 tai 1,5,6 tai 3,4,5 (jossain järjestyksessä).

COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,16,4 DISTINCT=1 OFF=1,3,8  
 Partitions 4 of 16: N[P]=0  
 COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,16,4 DISTINCT=1 OFF=1,4,7  
 Partitions 4 of 16: N[P]=1  
 2 3 5 6

	A	B	C	D	
1	2	1	4	7	14
2	3	*	*	*	28
3	5	*	*	*	44
4	6	*	*	*	50
5	16	33	40	47	

Ristikko voisi näyttää tältä.  
 Rivin 1 ja sarakkeen A punaiset  
 luvut eivät ole välttämättä  
 oikeassa järjestyksessä.

Jos nyt riville 2 yrittää sijoittaa käyttämättömistä luvuista  
 pienimmät 8,9,10

	A	B	C	D	
1	2	1	4	7	14
2	3	8	9	10	28
3	5	*	*	*	44
4	6	*	*	*	50
5	16	33	40	47	

rivisummaksi tulee  $3+8+9+10=30>28$  eli liian suuri.

COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,16,4 DISTINCT=1 MAX=16 OFF=1,5,6  
 Partitions 4 of 16: N[P]=1  
 2 3 4 7

Tämä johtaa samoin kuin edellä rivisumman 28 ylitykseen.

COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,16,4 DISTINCT=1 MAX=16 OFF=3,4,5  
 Partitions 4 of 16: N[P]=1  
 1 2 6 7

	A	B	C	D	
1	2	3	4	5	14
2	1	8	9	10	28
3	6	*	*	*	44
4	7	*	*	*	50
5	16	33	40	47	

Nyt toinen rivisumma olisi oikein, mutta vaikka sarakkeeseen D  
 on nyt sijoitettuna suurimmat mahdolliset luvut 5 ja 10, erotus  
 $47-5-10=32$  on liian suuri esitettäväksi kahden sallitun luvun summana.

**Siis A1=1.**

.....

	A	B	C	D	
1	1	*	*	*	14
2	*	*	*	*	28
3	*	*	*	*	44
4	*	*	*	*	50
5	16	33	40	47	

Tarkastellaan edelleen rivin 1 ja sarakkeen A osituksia - nyt ehdolla A1=1.

14-1=13

COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,13,3 DISTINCT=1 MAX=16 OFF=1

Partitions 3 of 13: N[P]=4

2 3 8

2 4 7

2 5 6

3 4 6

16-1=15

COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,15,3 DISTINCT=1 MAX=16 OFF=1

Partitions 3 of 15: N[P]=7

2 3 10

2 4 9

2 5 8

2 6 7

3 4 8

3 5 7

4 5 6

Mahdolliset ositusparit ovat silloin

14-1    16-1

2 3 8    4 5 6

2 5 6    3 4 8

3 4 6    2 5 8

ja näin ensimmäisessä rivissä ja sarakkeessa ovat luvut 1,2,3,4,5,6,8.

Pienimmät vapaat luvut rivin 2 sarakkeisiin B,C,D ovat

silloin 7,9,10. Koska niiden summa 7+9+10=26 alittaa

koko rivin summan 28 kahdella, on siis A2=2.

Kaikki muut vapaat luvut aiheuttaisivat rivisumman ylityksen.

Tilanne näyttää seuraavalta:

	A	B	C	D	
1	1	*	*	*	14    3,4,6 tällä rivillä jossain järjestyksessä
2	2	*	*	*	28    7,9,10 tällä rivillä jossain järjestyksessä
3	*	*	*	*	44
4	*	*	*	*	50
5	16	33	40	47	

Luvut 5,8 sarakkeessa A jossain järjestyksessä.

.....  
 Tutkitaan B-sarakkeen ositusvaihtoehtoja:

COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,33,4 DISTINCT=1 MAX=16 OFF=1,2,5,8

Partitions 4 of 33: N[P]=17

3 4 10 16

3 4 11 15  
 3 4 12 14  
 3 6 9 15  
 3 6 10 14  
 3 6 11 13  
 3 7 9 14  
 3 7 10 13  
 3 7 11 12 ainoa mahdollinen!  
 3 9 10 11  
 4 6 7 16  
 4 6 9 14  
 4 6 10 13  
 4 6 11 12  
 4 7 9 13  
 4 7 10 12  
 6 7 9 11

Näistä mahdollisia ovat vain sellaiset, joissa eivät esiinny  
 yhtäaikaa toisaalta luvut 3,4,6 eikä toisaalta luvut 7,9,10.  
 Ainoa ehdot täyttävä ositus on silloin  $3+7+11+12=33$   
 ja siis aikaisemmin todettujen ensimmäisten rivien ositusten  
 perusteella on  $B1=3$  ja  $B2=7$ .

On tultu tilanteeseen, jossa samalla värillä esitetyt luvut  
 ovat järjestystä vaille paikallaan:

	A	B	C	D	
1	1	3	4	6	14
2	2	7	9	10	28
3	5	11	13	14	44
4	8	12	15	16	50
5	16	33	40	47	

Oikeitten järjestysten setviminen tapahtuu katsomalla ensin  
 D-sarakkeen tämänjälkeisiä, mahdollisia osituksia:

.....  
 COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,47,4 DISTINCT=1 MAX=16 OFF=1,2,3,7,5,8,11,12  
 Partitions 4 of 47: N[P]=3  
 4 13 14 16  
 6 10 15 16  
 9 10 13 15

Osituksista vain toinen  $6+10+15+16=47$  on mahdollinen sen perusteella,  
 mitä tiedetään kahdesta ensimmäisestä rivistä eli ristikko varmistuu  
 osittain muotoon

	A	B	C	D	
1	1	3	4	6	14
2	2	7	9	10	28
3	5	11	13	15	44
4	8	12	14	16	50
5	16	33	40	47	

joka sattuu olemaan lopullinen tulos.  
Periaatteessa kahden viimeisen rivin suhteen olisi vielä  
 $2^4=16$  vaihtoehtoa, mikä on aika lailla pienempi vaihtoehtojen  
määrä kuin alkuperäinen  $\text{fact}(12)=479001600$ .

Ratkaisun yksikäsitteisyyden varmistaa helppoiten viimeisen rivin ositus  
COMB P,CUR+1 / P=PARTITIONS,50,4 DISTINCT=1 MAX=16 OFF=1,3,4,6,2,7,9,10  
Partitions 4 of 50: N[P]=5  
5 14 15 16  
8 11 15 16  
8 12 14 16  
8 13 14 15  
11 12 13 14

Näistä vaihtoehdoista vain kolmas  $8+12+14+16=50$  koostuu  
valintakelpoisista luvuista.

-----

## 8. TEHTÄVIÄ

Tässä on ratkaistavaksi 12 Survo-ristikkoa. Kymmenen ensimmäisen ratkaisut ovat tehtävien jälkeen. Tehtävän yhteydessä annettu, sulussa oleva luku kertoo ratkaisuohjelmasta saadun vaikeusasteen. Näihin lukuihin tulee suhtautua varauksella, koska ne eivät voi ottaa huomioon hyvien oivallusten kautta syntyviä oikoteitä. Osan tehtävistä olen esittänyt jo aikaisemmin Survo-keskustelussa.

**Tehtävä 1 (1.5)**

				7
				14
9	8	4		

**Tehtävä 2 (18)**

				11
				25
8	11	7	10	

**Tehtävä 3 (17)**

12				28
	8		1	28
		6		22
32	16	23	7	

**Tehtävä 4 (50)**

			8
			15
			22
11	13	21	

**Tehtävä 5 (50)**

10				12	2		63
	17		11		3	6	89
19		5					79
49	41	32	30	27	18	34	

**Tehtävä 6 (105)**

	23		1		18	93
2		3		16		67
	10			13		67
15		11	14		8	73
46	61	39	42	45	67	

**Tehtävä 7 (30)**

12		8		11	50
	13		10		47
		2			23
24	23	13	34	26	

**Tehtävä 8 (15)**

13			6	26
	9			43
		12		26
1			10	41
30	28	47	31	

**Tehtävä 9 (55)**

12				19			10			106
					17			14	8	104
16	22	6	25	39	20	24	12	23	23	

**Tehtävä 10 (145)**

				24
				15
				39
21	10	18	29	

**Tehtävä 11 (2050)**

				51
				36
				32
				17
51	42	26	17	



## Tehtävä 12 (17000 eli ”petomainen”)

10		29			5	83
	27			8		94
33		19	32		22	139
		21	12			101
	20			28		86
30		11			35	163
93	141	87	99	112	134	666

## 9. TEHTÄVIEN RATKAISUJA

**Tehtävä 1 (1.5)**

4	2	1	7
5	6	3	14
9	8	4	

**Tehtävä 2 (18)**

1	5	3	2	11
7	6	4	8	25
8	11	7	10	

**Tehtävä 3 (17)**

12	5	7	4	28
9	8	10	1	28
11	3	6	2	22
32	16	23	7	

## Tehtävä 4 (50)

3	1	4	8
2	5	8	15
6	7	9	22
11	13	21	

## Tehtävä 5 (50)

10	8	9	15	12	2	7	63
20	17	18	11	14	3	6	89
19	16	5	4	1	13	21	79
49	41	32	30	27	18	34	

## Tehtävä 6 (105)

20	23	19	1	12	18	93
2	7	3	22	16	17	67
9	10	6	5	13	24	67
15	21	11	14	4	8	73
46	61	39	42	45	67	

## Tehtävä 7 (30)

12	4	8	15	11	50
7	13	3	10	14	47
5	6	2	9	1	23
24	23	13	34	26	

**Tehtävä 8 (15)**

13	3	4	6	26
11	9	15	8	43
5	2	12	7	26
1	14	16	10	41
30	28	47	31	

**Tehtävä 9 (55)**

12	6	1	18	19	3	13	10	9	15	106
4	16	5	7	20	17	11	2	14	8	104
16	22	6	25	39	20	24	12	23	23	

**Tehtävä 10 (145)**

7	3	5	9	24
4	1	2	8	15
10	6	11	12	39
21	10	18	29	

### 3 × 3 -RISTIKKOJEN ANALYYSIA

REIJO SUND  
19.4.2006

Oheisessa toimituskentässä on hiukan 3x3-ristikoiden analyysia. Kuten käy ilmi, oleellisesti erilaisia avoimia yksikäsitteisesti ratkeavia Survo-ristikoita ei ole kuin 38.

-----  
Muodostetaan kaikki mahdolliset 3x3-ristikot (N=362880)

```
FILE DEL SRIS.TXT
COMB P TO SRIS.TXT / P=PERMUTATIONS,9 RESULTS=1
FILE DEL SRIS01
FILE SAVE SRIS.TXT TO NEW SRIS01 / NEWSPACE=80,20
```

.....  
Käytetään ristikossa seuraavia symboleita:

```
X1 X2 X3 R1
X4 X5 X6 R2
X7 X8 X9 R3
S1 S2 S3
```

.....  
Lasketaan rivi- ja sarekesummat sekä tallennetaan nämä lisäksi yhdellä muuttujalla esitettäväksi

```
VAR R1:1,R2:1,R3:1,S1:1,S2:1,S3:1,JARJ:8 TO SRIS01
R1=X1+X2+X3
R2=X4+X5+X6
R3=X7+X8+X9
S1=X1+X4+X7
S2=X2+X5+X8
S3=X3+X6+X9
JARJ=S3+100*S2+10000*S1+1000000*R3+100000000*R2+JARJ2
JARJ2=10000000000*R1+1000000000000
```

```
FILE SHOW SRIS01
```

.....  
Järjestetään rivi- ja sarakesummien yhdistelmien mukaan

```
FILE SORT SRIS01 BY JARJ TO SRIS02
```

.....  
Lasketaan montako kutakin rivi- ja sarakesummien yhdistelmää on (N=46147)

```
FILE AGGR SRIS02 BY JARJ TO SRIS03 / PRIND=0
```

## VARIABLES:

JARJ FIRST JARJ  
 MAARA N JARJ  
 X1 FIRST X1  
 X2 FIRST X2  
 X3 FIRST X3  
 X4 FIRST X4  
 X5 FIRST X5  
 X6 FIRST X6  
 X7 FIRST X7  
 X8 FIRST X8  
 X9 FIRST X9  
 R1 FIRST R1  
 R2 FIRST R2  
 R3 FIRST R3  
 S1 FIRST S1  
 S2 FIRST S2  
 S3 FIRST S3  
 END

## FILE SHOW SRIS03

.....  
 Jatkotarkasteluihin vain ne ristikot, joihin on yksikäsitteinen  
 ratkaisu pelkillä rivi- ja sarakesummilla (N=2736)

FILE COPY SRIS03 TO NEW SRIS04 / IND=MAARA,1 NEWSPACE=120,30

## FILE SHOW SRIS04

.....  
 Kyseessä ovat oleellisesti samat ristikot, vaikka rivien (tai  
 sarakkeiden) paikkoja vaihdettaisiin keskenään. Poistetaan  
 "turhat" ristikot ja valitaan joka luokasta mukaan satunnainen  
 ristikko esimerkiksi

Järjestetään rivi- ja sarakesummat

VARSTAT SRIS04,\*,SORT / VARS=R1,R2,R3  
 VARSTAT SRIS04,\*,SORT / VARS=S1,S2,S3

.....  
 Muodostetaan rivi- ja sarakekohtaiset yhdistelmämuuttujat  
 sekä satunnaisluku

VAR RJARJ:8,SJARJ:8,SAT TO SRIS04  
 RJARJ=R3+100\*R2+10000\*R1  
 SJARJ=S3+100\*S2+10000\*S1  
 SAT=rnd(999)

.....  
 Rivit ja sarakkeet voivat vaihtaa paikkaa

VARSTAT SRIS04,\*,SORT / VARS=RJARJ,SJARJ

.....  
Järjestetään luokittain ja luokan sisällä satunnaisesti

VAR JARJ:8=SJARJ+1000000\*RJARJ+1000000000000 TO SRIS04  
FILE SORT SRIS04 BY JARJ,SAT TO SRIS05

.....  
Valitaan esimerkit jokaisesta oleellisesti  
erilaisesta ristikosta (N=38)

FILE AGGR SRIS05 BY JARJ TO SRIS06 / PRIND=0

VARIABLES:

JARJ FIRST JARJ

MAARA N JARJ

X1 FIRST X1

X2 FIRST X2

X3 FIRST X3

X4 FIRST X4

X5 FIRST X5

X6 FIRST X6

X7 FIRST X7

X8 FIRST X8

X9 FIRST X9

END

FILE SHOW SRIS06

.....  
Lasketaan rivi- ja sarakesummat uudestaan

FILE EXPAND SRIS06,30,120

VAR R1:1,R2:1,R3:1,S1:1,S2:1,S3:1 TO SRIS06

R1=X1+X2+X3

R2=X4+X5+X6

R3=X7+X8+X9

S1=X1+X4+X7

S2=X2+X5+X8

S3=X3+X6+X9

Näytetään kaikki yksikäsitteisesti ratkeavat ristikot (N=38)

FILE SORT SRIS06 BY R1,R2,R3,S1,S2,S3 TO SRIS06S

FILE LOAD SRIS06S

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	R1	R2	R3	S1	S2	S3
7	9	6	5	8	4	2	3	1	6	17	22	11	14	20
3	6	5	7	9	8	1	4	2	7	14	24	11	15	19
8	6	9	2	1	4	5	3	7	7	15	23	10	15	20
3	6	7	5	8	9	1	2	4	7	16	22	9	16	20
9	5	8	4	2	1	7	3	6	7	16	22	10	15	20
7	5	9	6	3	8	2	1	4	7	17	21	9	15	21
4	1	2	7	6	8	9	3	5	7	17	21	10	15	20
9	5	3	7	8	6	4	1	2	7	17	21	11	14	20
3	5	9	6	7	8	2	4	1	7	17	21	11	16	18
1	5	2	6	8	9	3	7	4	8	14	23	10	15	20
3	4	1	6	7	2	8	9	5	8	15	22	8	17	20
8	2	5	4	1	3	7	6	9	8	15	22	9	17	19
7	6	9	4	3	8	2	1	5	8	15	22	10	13	22
3	4	1	5	8	2	6	9	7	8	15	22	10	14	21
9	6	7	8	2	5	4	3	1	8	15	22	11	13	21
4	2	7	3	1	5	8	6	9	9	13	23	9	15	21
9	8	6	5	7	1	2	4	3	9	13	23	10	16	19
8	5	9	6	1	7	3	2	4	9	14	22	8	17	20
4	9	8	1	6	2	3	7	5	9	15	21	8	15	22
5	8	3	7	9	4	2	6	1	9	16	20	8	14	23
9	3	8	7	4	5	6	1	2	9	16	20	8	15	22
9	8	5	3	6	1	4	7	2	10	13	22	8	16	21
2	5	7	4	8	9	1	3	6	10	14	21	7	16	22
3	1	6	4	2	8	7	5	9	10	14	21	8	14	23
5	4	1	7	6	2	9	8	3	10	15	20	6	18	21
2	7	1	4	8	3	6	9	5	10	15	20	9	12	24
5	2	8	1	3	6	7	4	9	10	15	20	9	13	23
9	7	3	5	4	1	8	6	2	10	16	19	6	17	22
8	7	4	6	3	1	9	5	2	10	16	19	7	15	23
5	8	3	6	9	4	2	7	1	10	16	19	8	13	24
5	8	1	7	9	4	3	6	2	11	14	20	7	15	23
6	5	9	4	2	8	3	1	7	11	14	20	8	13	24
9	3	7	6	1	4	8	2	5	11	15	19	6	16	23
4	8	7	2	6	3	1	9	5	11	15	19	7	15	23
5	4	9	7	1	8	3	2	6	11	16	18	7	15	23
3	2	9	7	4	8	5	1	6	12	14	19	7	15	23
1	2	9	7	4	8	5	3	6	12	14	19	9	13	23
3	9	6	2	8	5	1	7	4	12	15	18	6	15	24

---