Seppo Mustonen[1]

Survo työvälineenä kokeellisessa matematiikassa

Olen ollut kehittämässä vuodesta 1960 lähtien tilastomatemaattisia ohjelmia. Ajatus kokonaisvaltaisesta lähestymistavasta eli tarpeesta luoda yleinen järjestelmä, jossa eri ohjelmat toimivat yhtenä, saumattomana kokonaisuutena ja niitä hallitaan oman kielensä avulla, syntyi vuonna 1962 ja sai toteutuessaan vuonna 1966 nimen SURVO 66. Sen jälkeen Survo on kokenut useita muodonmuutoksia, joista tärkein oli siirtyminen ns. editoriaaliseen käyttötapaan (1979) ja uusin on vapaan lähdekoodin versio Survo R.

Survon kehitysvaiheille on ollut ominaista, että se on laajentunut tilastollisesta ohjelmistosta käyttöympäristöksi, joka kattaa yhtenäisellä tavalla monet tilastollista tutkimusta tukevat tehtävät, kuten tekstinkäsittelyn, taulukkolaskennan, editoriaalisen laskennan, grafiikan, painettujen julkaisujen ja verkkosivujen teon, toistuvien raporttien automatisoinnin, asiantuntijasovellusten ja opetusohjelmien laadinnan. Nykysurvolle ominaisen editoriaalisen käyttötavan idean sain yllättäen erään musiikillisen tehtävän yhteydessä [5].

Koska editoriaalinen käyttötapa tukee myös eri tavoin numeerista laskentaa, olen tässä kehitystyössä useaan otteeseen koetellut Survon kykyjä myös kokeellisessa matematiikassa. Sellaiseen Survo on suosiollinen ympäristö. Työskentely on melkein yhtä vapaata kuin muistiinpanojen teko kynällä paperille. Tähän verrattuna etuna on se, että esim. laskutoimituksille ja tilastollisille analyyseille on suorat Survon tarjoamat keinot. Kaikki aikaansaannokset ovat lisäksi välittömästi editoitavissa ja tallennettavissa sekä hyödynnettävissä uusissa yhteyksissä. Työt näin dokumentoivat itsensä.

Survon editoriaalisesta laskennasta antanee käsityksen seuraava alkeellinen esimerkki vuodelta 1980:

Alla on ote Survon kuvaruudussa näkyvästä toimituskentästä, joka voi käsittää jopa miljoonia rivejä ja jossa voi tavanomaisin tekstinkäsittelykeinoin kirjoittaa ja muokata tekstiä:

```
____________________________________________________________
  1 *
  2 *Olkoot kolmion sivut a=13, b=14 ja c=15.
  3 *Kolmion pinta-ala voidaan laskea ns. Heronin kaavalla
  4 *Ala=sqrt(p*(p-a)*(p-b)*(p-c))
  5 *missä p on kolmion piirin puolikas p=(a+b+c)/2 ja missä
  6 *sqrt() tarkoittaa neliöjuurta.
  7 *Siten Ala=_
  8 *
____________________________________________________________
```

Kun tässä tilanteessa käyttäjä aktivoi esim. hiiren kaksoisnäpäytyksellä kohdistimen ollessa rivillä 7 merkin = perässä, näkymä muuttuu seuraavaksi:

```
____________________________________________________________
  1 *
  2 *Olkoot kolmion sivut a=13, b=14 ja c=15.
  3 *Kolmion pinta-ala voidaan laskea ns. Heronin kaavalla
  4 *Ala=sqrt(p*(p-a)*(p-b)*(p-c))
  5 *missä p on kolmion piirin puolikas p=(a+b+c)/2 ja missä
  6 *sqrt() tarkoittaa neliöjuurta.
  7 *Siten Ala=84_
  8 *
____________________________________________________________
```

Siis kysyttäessä edelläkuvatulla tavalla Alan arvoa, Survo (tietämättä luontaisesti mitään kolmion pinta-alan laskemisesta) havaitsee rivillä 4 olevan kaavan

[1] Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto, seppo.mustonen@survo.fi

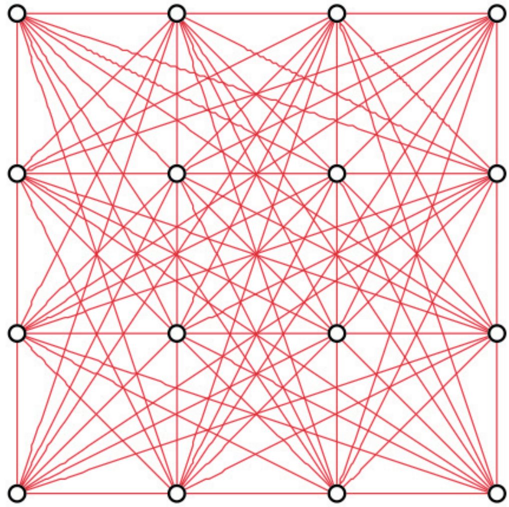
ja, huomatessaan tarvitsevansa suureiden p, a, b, c arvoja, osaa löytää ja laskea niiden arvot ja sijoittaa ne kaavaan sekä lopulta laskea tuloksen ja kirjoittaa sen Alan arvoksi oikealle paikalleen tässä toimituskentässä. Työskentelytapa poikkeaa tavanomaisesta ohjelmoinnista, jossa tehtävän suoritukseen tarvittavat käskyt tulee esittää johdonmukaisesti peräkkäin oikeassa järjestyksessä. Vaativampiin tehtäviin on kyllä tarjolla Survon oma makrokieli, jolla esim. alkulukuja luetteloidaan seuraavasti:

```
------------------------------------------------------------
 1 *
 2 *TUTSAVE PRIMES
 3 / def Wnumber=W1 Wdivisor=W2 Wremainder=W3 Wsquare=W4
 4 *{tempo 1}{R}
 5 *SCRATCH {act}{home}2 3{Wnumber=3}
 6 + A: {Wnumber=Wnumber+2}{Wdivisor=1}
 7 + B: {Wdivisor=Wdivisor+2}{Wremainder=Wnumber%Wdivisor}
 8 - if Wremainder = 0 then goto A
 9 *{Wsquare=Wdivisor*Wdivisor}
10 - if Wsquare < Wnumber then goto B
11 * {write Wnumber}{goto A}{end}
12 *
13 */PRIMES
14 *2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97
15 *101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191
16 *193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283
17 *293 307 311 313 317 331 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401
18 *409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499 503 509
19 *521 523 541 547 557 563 569 571 577 587 593 599 601 607 613 617 619 631
20 *641 643 647 653 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727 ...
------------------------------------------------------------
```

Tässä on riveille 3--11 kirjoitettu pieni makro-ohjelma, joka luvuista 2 ja 3 lähtien etsii ja listaa peräkkäisiä alkulukuja tehottomalla tavalla. Ohjelma tallennetaan aluksi rivin 2 komennolla nimellä `PRIMES` ja käynnistetään sitten rivin 13 `/PRIMES`-komennolla.

Survon makrokielellä on keskeinen merkitys laajojen tehtäväkokonaisuuksien automaattisessa ohjailussa ja opetusohjemien laadinnassa. Makrokielinen ohjelma syntyy usein yksinkertaiseksi käyttämällä Survoa normaalisti näppäimistön avulla ja antaen Survon tallettaa kaikki toimenpiteet. Kun näin syntynyt makrokoodi ladataan Survon toimituskenttään, sitä saattaa muokata monin tavoin, mm. lisäämällä ehdollisia toimintoja.

Tällaisena makro-ohjelmana olen kuvannut, miten Survon avulla löysin vuonna 2009 kokeellisesti laskennallisesti tehokkaan rekursiokaavan $m \times n$ -hilapisteistössä ainakin kahden pisteen kautta kulkevien suorien lukumäärälle $L(m, n)$.



$$L(4, 4) = 62$$

Tämä kuvaus on saatavilla videona [4]. Videon sisältö staattisemmin esitettynä on seuraava.

Tiedossani oli alunperin yksinkertainen, mutta tehoton kaava

$$L(n, n) = \frac{1}{2}[f(n, 1) - f(n, 2)], \qquad (1)$$

missä

$$f(n, k) = \sum_{\substack{-n<x<n \\ -n<y<n \\ \text{syt}(x,y)=k}} (n - |x|)(n - |y|).$$

Sen mukaiseen laskentaan ohjelmoin oman Survoon liitetyn komennon `LMN`. Tein sen avulla mm. seuraavia laskelmia:

```
------------------------------------------------------------
 *
 * LMN 1001,1001
 * L(1001,1001): 228885146644   Merk. n=1001 Lnn=228885146644
 * LMN 1000,1001
 * L(1000,1001): 228428186447                Ln1n=228428186447
 * LMN 1000,1000
 * L(1000,1000): 227972138554                Ln1n1=227972138554
 *
 * Tällöin (Lnn-2*Ln1n+Ln1n1)/Lnn=0.00000398585934
 *
------------------------------------------------------------
```

On ilmeisesti mahdotonta löytää helposti laskettavaa lauseketta siitä syystä, että kaltevien suorien lukumäärä riippuu olennaisesti luvun $n-1$ (ja sitä pienempien lukujen) jaollisuudesta.

Yllä olevasta laskelmasta havaitaan, että erotukset $L(n,n)-L(n-1,n)$ ja $L(n-1,n)-L(n-1,n-1)$ ovat suhteellisesti ottaen lähellä toisiaan ja niinpä oli aihetta otaksua, että luvuille $L(n,n)$ pätee muotoa

$$L(n,n) = 2L(n-1,n) + L(n-1,n-1) + R_1(n)$$

oleva rekursiokaava, missä $R_1(n)$ on jäännöstermi. Niinpä pyrin kokeellisesti selvittämään jäännöstermin rakenteen. Seuraava Survon toimituskenttään luotu asetelma kertoo, miten pääsin oikeaan arvaukseen.

```
------------------------------------------------------------
 1 *
 2 *DATA LNN,A,B,N,M
 3 N n  Lnn    Ln1n   Ln1n1 R1p4   d phi diff  e R1p4C
 4 M11 111111 111111 111111 1111  11  11 11   11 11111
 5 A 2      6                            -           1
 6 * 3     20     11      6    1   -   1 -     1     1
 7 * 4     62     35     20    3   2   2 0     0     3
 8 * 5    140     93     62    4   1   2 1     1     4
 9 * 6    306    207    140    8   4   4 0     0     8
10 * 7    536    405    306    8   0   2 2     2     8
11 * 8    938    709    536   14   6   6 0     0    14
12 * 9   1492   1183    938   16   2   4 2     2    16
13 *10   2306   1855   1492   22   6   6 0     0    22
14 *11   3296   2757   2306   22   0   4 4     4    22
15 *12   4722   3945   3296   32  10  10 0     0    32
16 *13   6460   5523   4722   34   2   4 2     2    34
17 *14   8830   7553   6460   46  12  12 0     0    46
18 *15  11568  10107   8830   46   0   6 6     6    46
19 *16  14946  13149  11568   54   8   8 0     0    54
20 *17  18900  16807  14946   58   4   8 4     4    58
21 *18  23926  21265  18900   74  16  16 0     0    74
22 *19  29544  26587  23926   74   0   6 6     6    74
23 *20  36510  32843  29544   92  18  18 0     0    92
24 *21  44388  40257  36510   96   4   8 4     4    96
25 *22  53586  48771  44388  108  12  12 0     0   108
26 B23  63648  58401  53586  108   0  10 10   10   108
27 *
28 *VAR R1p4=(Lnn-2*Ln1n+Ln1n1)/4 TO LNN
29 *VAR d=R1-R1[-1] TO LNN
30 *VAR phi=totient(n-1) TO LNN
31 *VAR diff=phi-d TO LNN
32 *VAR e=phi2(n) TO LNN
33 *
34 *phi2(N):=if(mod(N,2)=0)then(0)else(totient((N-1)/2))
35 *
36 *VAR R1p4C=R1p4C[-1]+totient(n-1)-phi2(n) TO LNN / IND=ORDER,2,24
37 *
------------------------------------------------------------
```

Tässä on Survolle ominainen havaintotaulukko, johon on LMN-komennon avulla laskettu $L(n,n)$-, $L(n-1,n)$- ja $L(n-1,n-1)$-lukuja arvoilla $n=2,3,\ldots,23$ sarakkeina Lnn, Ln1n, Ln1n1. Osoittautui, että kaikki jäännöstermit $R_1(n)$ ovat luvun 4 kerrannaisia, ja siksi rivin 28 VAR-komennolla on laskettu niiden neljäsosat nimellä R1p4. Kun havaitaan, että R1p4-sarakkeessa on useita yhtäsuuria peräkkäisiä lukuja, on laskettu rivin 29 VAR-komennolla peräkkäiset erotukset sarakkeeksi d. Nyt on ratkaisevaa havaita, että useat d-arvot ovat suoraan Eulerin totienttifunktion arvoja argumentilla $n-1$ eli kannattaa laskea ne (tässä muuttujana phi rivin 30 VAR-komennolla) ja muodostaa erotukset diff=phi-d rivin 31 VAR-komennolla).

Sarakkeessa diff (joka on 0, kun n on parillinen) totienttifunktio kummittelee edelleen siten, että parittomilla n-arvoilla d=totient((n-1)/2). Tämä on tarkistettu laskemalla sarake e rivin 32 VAR-komenolla.

Näin jäännöstermin $R_1(n)$ rakenne selviää tekemällä kolme viimeistä muunnosta käänteisesti (VAR-komento rivillä 36, jolla lasketaan sarake R1p4C) ja havaitaan, että todellakin R1p4C=R1p4 arvoilla $n=3,4,\ldots,23$. Olen tässä supistanut tilan säästämiseksi alkuperäistä koettani, jossa kaavioni ylettyi hieman pitemmälle ja saatoin tarkistaa tulokset sen jälkeen kohtalaisen suurilla arvoilla LMN-komennolla.

Tästä tuloksesta yksinään ei ole paljon hyötyä, koska $L(n,n)$ riippuu myös luvusta $L(n-1,n)$. Tämän vuoksi oli tarpeen vainuta, että myös luvuille $L(n-1,n)$ löytyy vastaavanlainen rekursiokaava ja sainpa senkin selville samalla tavalla. Oli ilmeistä, että

$$L(n-1,n) = 2L(n-1,n-1) + L(n-2,n-1) + R_2(n),$$

ja jäännöstermin $R_2(n)$ rakenne löytyi jopa hieman helpommin vastaavanlaisella tarkastelulla.

Näin laskennan kannalta tehokkaat rekursiokaavat ovat

$$\begin{aligned} L(n,n) &= 2L(n-1,n) - L(n-1,n-1) + R_1(n), \\ L(n-1,n) &= 2L(n-1,n-1) - L(n-2,n-1) \\ &\quad + R_2(n), \end{aligned}$$

missä $R_1(n) = R_1(n-1) + 4(\phi(n-1) - e(n))$ ja

$$e(n) = \begin{cases} 0, & \text{kun } n \text{ on parillinen} \\ \phi((n-1)/2) & \text{kun } n \text{ on pariton} \end{cases}$$

ja

$$R_2(n) = \begin{cases} (n-1)\phi(n-1) & \text{kun } n \text{ on parillinen,} \\ (n-1)\phi(n-1)/2 & \text{jos } n \equiv 1 \pmod 4, \\ 0 & \text{jos } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

alkuarvoin $L(0,0) = L(0,1) = R_1(1) = 0$.

Nämä rekursiokaavat antavat tilaisuuden laskea $L(n,n)$-arvoja hyvin suurilla n-arvoilla ja tarkkailla samalla asymptoottista käyttäytymistä. Jo ennen kuin löysin rekursiokaavat saatoin toimia Survon hitaalla `LMN`-ohjelmalla, siis kaavalla (1), systemaattisesti arvoon $n = 15000$ asti ja erikseen vielä esim. arvolla $n = 40000$, jolloin $L(n,n) = 583610033692337762$, ja päädyin arvioon

$$L(n,n) = [3/(2\pi)]^2 n^4 + O(n^{2.5}). \qquad (2)$$

Jorma Merikoski esitteli empiirisiä tuloksiani Lukuteorian päivillä toukokuussa 2009 Tampereella. Läsnäolleet Anne-Maria Ernvall-Hytönen ja Kaisa Matomäki ilmoittivat löytäneensä todistuksen rekursiokaavoille noin kuukauden päästä. Tällä välin Pentti Haukkanen ja Jorma Merikoski olivat tarkastelleet $L(n,n)$-lukujen asymptoottista käyttäytymistä ja kaikki tämä johti siihen, että nämä neljä yhdessä edelleen tarkensivat tätä asymptotiikkaa ja kirjoittivat artikkelin [1], jossa mm. päädyttiin tulokseen

$$L(n,n) = [3/(2\pi)]^2 n^4 + O(n^{2.5+\epsilon}) \quad \text{kaikilla} \quad \epsilon > 0 \qquad (2')$$

sillä ehdolla, että Riemannin hypoteesi pätee. Ero arvaukseeni (2) on todella 'hiuksenhieno'.

Itse olen jatkanut kokeellista tarkastelua laskemalla Mathematica-ohjelman avulla L(n,n)-lukuja arvoon 10^{11} asti. Asymptoottisten arvojen poikkeamat tarkoista jaettuina luvulla $n^{2.5}$ on esitetty graafisesti kuvassa [6], joka tilastollisella silmällä näyttäisi tukevan Riemannin hypoteesin mukaista tulosta.

Tätä jatkokoetta en voinut tehdä suoraan Survolla, sillä siinä kokonaislukuaritmetiikka rajoittuu korkeintaan 64-bittisiin lukuihin. Kuitenkin tämänkaltaisen kokeellisen tutkimuksen hapuilu- ja ideointivaiheessa Survolle ominainen työskentelytapa on joustavampi kuin tyypillisten matematiikkaohjelmien tarjoama.

Useita muita ohjelmia on kätevä hallita suoraan Survosta. Esim. kaikki Mathematicalla tekemäni laskelmat on toteutettu niin, että tarvittavan Mathematica-koodin olen kirjoittanut ensin Survon toimituskenttään ja tallentanut tekstitiedostoksi. Sitten laatimallani Survon makrolla olen kutsunut Mathematican tekemään laskelmat ja tallettamaan tulokset toiseen tekstitiedostoon, josta tuo makro on kirjottanut tulokset toimituskenttään. Tätä olen kuvannut tarkemmin kirjoitukseni [2] sivuilla 27--29.

Kaikki muutkin tarkasteluni olen esittänyt Survon verkkosivuilla [2][3] ja tällöin olen kokeellisesti saatujen tulosten ohella mm. johtanut ja myös todistanut yleistä tapausta $L(m,n)$ koskevan rekursiokaavan.

Viitteet

[1] A-M.Ernvall-Hytönen, K.Matomäki, P.Haukkanen, J.K.Merikoski, Formulas for the number of gridlines. Monatsh. Math. 164, 157--170 (2011) http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00605-010-0236-6

[2] S.Mustonen, On lines and their intersection points in a rectangular grid of points. http://www.survo.fi/papers/PointsInGrid.pdf (2009)

[3] S.Mustonen, On lines through a given number of points in a rectangular grid of points. http://www.survo.fi/papers/LinesInGrid2.pdf (2010)

[4] Hilasuorien lukumäärän rekursiokaavan etsintä videona. http://www.survo.fi/demos/index.html#ex80

[5] Editoriaalisen käyttötavan lähtöidea. http://www.survo.fi/demos/index.html#ex6

[6] $L(n,n)$ asymptoottisesti. http://www.survo.fi/papers/DevLn2015.pdf